

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49
AMSTERDAM-O.

ZC 53

Hoofdstukken uit de Functionaalanalyse

door

Prof.dr. L. Kuipers

1961

STICHTING
 MATHEMATISCH CENTRUM
 2e BOERHAAVESTRAAT 49
 AMSTERDAM

Hoofdstukken uit de Functionaalanalyse

Cursus 1961

te

's-Gravenhage

door

Prof.dr. L. Kuipers

1. Moderne theorieën over differentiatie en integratie.

1.1. Differentiatie.

1.1.1. De stelling van Lebesgue over de afgeleide van een monotone functie.

1.1.1.1. Voorbeeld van een continue, niet-differentieerbare functie. Weierstrasz (zie P. Du Bois-Reymond, Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente, Journal für Math., 79 (1875), 21-37) was de eerste die een continue functie construeerde, die nergens een afgeleide bezit. Van der Waerden (Zürich) heeft een tamelijk elementair voorbeeld van een dergelijke functie gegeven. (Ein einfaches Beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen Funktion, Math. Zeitschrift, Band 32, Heft 3, 1930): is x een reëel getal, duidt $\{x\}$ de afstand van x tot het dichtstbijzijnde gehele getal aan, beschouw dan de functie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n}.$$

De termen van deze reeks zijn continu, de reeks zelf stelt een continue functie (!) voor.

Nu kan men aantonen, dat

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

niet bestaat. Neem daartoe voor x een getal met $0 \leq x < 1$ (géén beperking van de algemeenheid). Het is mogelijk een rij $h_1, h_2, \dots \rightarrow 0$ zó te kiezen, dat

$$\frac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

een rij gehele getallen voorstelt, afwisselend even en oneven. De genoemde rij kan dus niet convergent zijn.

1.1.1.2. De s t e l l i n g v a n L e b e s g u e over de afgeleide van een monotone functie:

Een monotone functie $f(x)$ bezit in elk punt x met uitzondering van een verzameling met een maat 0 een afgeleide, m.a.w. een monotone functie is bijna overal (b.o.) differentiëerbaar.

Lebesgue heeft deze stelling bewezen (zie: Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Paris, 1904) onder de bijkomende voorwaarde van de continuïteit van $f(x)$. Deze eis is echter overbodig.

Zonder diep in te gaan op de theorie van de Lebesgue-meetbaarheid maken we hier de volgende opmerking: een verzameling met een maat 0 is een verzameling van getallen (punten op de getallenrechte) x , die men kan insluiten in een eindig aantal of in een rij intervallen, waarvan de totale lengte (de som van de lengten der intervallen) willekeurig klein is. Men ziet direct: een deelverzameling van een verzameling met een maat 0 heeft een maat 0. Een rij van verzamelingen elk met een maat 0 is weer een verzameling met deze eigenschap. Iedere rij van punten is een verzameling met een maat 0. De bovengenoemde definitie van "verzameling met een maat 0" is gelijkwaardig met de volgende: een verzameling E heeft een maat 0 als men E kan insluiten in een rij van intervallen waarvan de totale "lengte" eindig is, terwijl elk punt van E in oneindig veel van deze intervallen ligt.

In zekere zin is de bovengenoemde stelling van Lebesgue het beste resultaat. Om deze bewering aan te tonen gaan we uit van een verzameling E met een maat 0. We construeren nu een functie, die toenemend is, en die géén (eindige) afgeleide bezit in de punten van E : sluit E in in een rij intervallen volgens de tweede definitie en stel $f(x)$ gelijk aan de som van de lengten van de intervallen (of segmenten van intervallen) die links van het punt x liggen. Dan is $f(x)$ in het punt x niet differentiëerbaar!

1.1.1.3. B e w i j s v a n d e s t e l l i n g v a n L e b e s g u e
De b.o.-differentiëerbaarheid van een monotone functie kan worden bewezen zonder de theorie van de integratie toe te passen. In Riesz-Nagy (Leçons d'analyse fonctionnelle, Budapest, 1952 (eerste druk)) vindt men een bewijs steunend op een stelling van F. Riesz (gepubli-

ceerd in 1932 in de Acta Sci.Math. Szeged, 5, p.208-221), die we hier vermelden als

H u l p s t e l l i n g. Zij $g(x)$ een functie, continu in $a \leq x \leq b$, en zij E de verzameling van de punten x met $a < x < b$ zódanig dat er een ξ is met de eigenschappen $\xi > x$ en $g(\xi) > g(x)$. Dan is E of leeg of een open verzameling; in het laatste geval is E een eindig aantal of een rij disjuncte, open intervallen (a_k, b_k) terwijl voor elk dezer intervallen geldt: $g(a_k) \leq g(b_k)$.

Met behulp van deze stelling kan men de stelling van Lebesgue bewijzen voor continue monotone functies. Is in een punt x van (a, b)

$$\Lambda_d = \limsup \{f(x+h) - f(x)\} h^{-1} \quad (h \downarrow 0)$$

$$\lambda_d = \liminf \{f(x+h) - f(x)\} h^{-1} \quad (h \downarrow 0)$$

$$\Lambda_g = \limsup \{f(x+h) - f(x)\} h^{-1} \quad (h \uparrow 0)$$

$$\lambda_g = \liminf \{f(x+h) - f(x)\} h^{-1} \quad (h \uparrow 0),$$

dan kan men aantonen, dat b.o.

$$\Lambda_d = \lambda_d = \Lambda_g = \lambda_g.$$

Met enige moeite kan men de hulpstelling zó wijzigen dat het hierboven aangeduide bewijs geldig is voor discontinue, monotone functies.

1.1.1.4. F u n c t i e s v a n b e g r e n s d e v a r i a t i e. Is $f(x)$ gedefinieerd op $a \leq x \leq b$, wordt het interval $[a, b]$ verdeeld volgens

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

dan heet $f(x)$ een functie van begrensde variatie, indien

$$\sum_{ab} = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

kleiner is dan een vast getal, dat onafhankelijk is van de keuze van de verdeling. Men noemt

$$T(a, b) = \sup \sum_{ab}$$

de t o t a l e v a r i a t i e van $f(x)$ in $[a, b]$. De totale variatie is een additieve intervalsfunctie: is $a < c < b$, dan is $T(a, c) + T(c, b) = T(a, b)$. Duidelijk is: een monotone functie is van begrensde variatie. Ook geldt: het verschil van twee monotone, niet-afnemende functies is van begrensde variatie. Camille Jordan heeft

bewezen:

Stelling. Elke functie van begrensde variatie is het verschil van twee niet-afnemende functies.

Wat het bewijs van deze stelling betreft, merken we het volgende op. Stel $T(x) = T(a, x)$ ($a \leq x \leq b$). Dan is $f(x) = T(x) - [T(x) - f(x)]$, Men bewijze nu dat zowel $T(x)$ als $T(x) - f(x)$ monotoon zijn.

Het is niet moeilijk om te bewijzen dat de functies $P(x) = \frac{1}{2} [T(x) + f(x)]$ en $N(x) = \frac{1}{2} [T(x) - f(x)]$ monotoon zijn. Daar

$$f(x) = P(x) - N(x)$$

geeft dit een tweede manier om $f(x)$ te schrijven als het verschil van twee monotone functies.

Uit 1.1.1.2 volgt nu de

S t e l l i n g v a n L e b e s g u e: Een functie van begrensde variatie bezit b.o. een (eindige) afgeleide.

1.1.2. Enige conclusies uit de stelling van Lebesgue (1.1.1.2 en 1.1.1.4).

1.1.2.1. Een stelling van Fubini over het differentiëren bij reeksen met monotone termen. Deze stelling luidt:

Gegeven is een rij van functies $f_n(x)$ ($n=1,2,\dots$), gedefinieerd op $a \leq x \leq b$ en (in dezelfde zin) monotoon. Gegeven is verder, dat de reeks $f_1(x)+f_2(x)+\dots$ convergeert en als som $s(x)$ heeft. De bewering is nu: b.o. is $f'_1(x)+f'_2(x)+\dots=s'(x)$ (m.a.w. de beschouwde reeks mag b.o. termsgewijs worden gedifferentieerd).

Bewijs. We mogen veronderstellen, dat $f_n(a)=0$ is ($n=1,2,\dots$). Verder nemen we aan dat de functies $f_n(x)$ monotoon-niet-dalend zijn. Stel

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x).$$

Dan is $s_n(x) \uparrow s(x)$. En b.o. is

$$s'_n(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + \dots + f'_n(x).$$

Ook bestaat $s'(x)$ (daar $s(x)$ in $a \leq x \leq b$ monotoon is) b.o.

Ook is $s(x)-s_n(x)$ differentieerbaar (b.o.), terwijl $s'(x)-s'_n(x) \geq 0$ is. De vraag is nu: geldt $s'(x)-s'_n(x) \downarrow 0$ (als $n \rightarrow \infty$)? Het antwoord is bevestigend. Immers: de rij $s(b)-s_n(b)$ convergeert naar 0 (als $n \rightarrow \infty$); er is dus een rij $s_{n_1}(b), s_{n_2}(b), \dots$ zó dat

$$s(b) - s_{n_k}(b) \leq 2^{-k} \quad (k=1,2,\dots).$$

Maar dan is ook

$$s(x) - s_{n_k}(x) \leq 2^{-k} \quad (a \leq x \leq b).$$

De rij functies $F_k(x) = s(x) - s_{n_k}(x)$ convergeert uniform naar 0 (als $k \rightarrow \infty$), terwijl $F_k(a)=0$, $F_k(x)$ monotoon-niet-dalend is (met x) en $F'_k(x)$ bestaat (b.o.). Hieruit leidt men gemakkelijk af, dat $F'_k(x) \downarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), of $s'_n(x) \uparrow s'(x)$, waaruit volgt: $s'_n(x) \uparrow s'(x)$. Hiermee is de stelling van Fubini bewezen.

1.1.2.2. Dichtheidspunten van lineaire puntverzamelingen.

Zij E een willekeurige verzameling van punten x . Zij I een rij van intervallen zó dat elk punt van E in minstens één interval van de rij I ligt. De grootste benedengrens van de verzameling

van de totale lengten van alle, E bevattende, verzamelingen I heet de u i t w e n d i g e m a a t van E en wordt aangeduid door $m_e(E)$. Uit deze definitie volgt: liggen E_1 en E_2 in twee disjuncte intervalsverzamelingen, dan is

$$m_e(E_1 \cup E_2) = m_e(E_1) + m_e(E_2).$$

Uit deze eigenschap volgt nog: letten wij op de doorsnede van een verzameling E met een (willekeurig) interval, dan blijkt de uitwendige maat van deze doorsnede een a d d i t i e v e i n t e r v a l s f u n c t i e.

We noemen x ($x \in E$ of x niet in E) een d i c h t h e i d s p u n t van E als

$$m_e\{E \cap (x-h, x+k)\} / (h+k) \rightarrow 1 \quad (0 < h, k \rightarrow 0).$$

We kunnen nu de volgende stelling uitspreken:

S t e l l i n g. Bijna alle punten (alle punten op een verzameling met een maat 0 na) van een willekeurige lineaire verzameling zijn dichtheidspunten van deze verzameling.

B e w i j s. Stel de beschouwde verzameling E ligt in (a, b) . Zij $f(x) = m_e\{E \cap (a, x)\}$. Dan is $f(x)$ monotoon. Volgens de te bewijzen stelling is nu $f'(x) = 1$ (b.o. op E), en omgekeerd. Dit tonen we als volgt aan. Overdek E met een rij $\sum_1, \sum_2, \dots$ van rijen intervallen. De rij der totale lengten convergeert naar $m_e(E)$. Stel $f_n(x) = m_e\{\sum_n \cap (a, x)\}$. Dan is op E : $f'_n(x) = 1$ ($n=1, 2, \dots$) (aangenomen kan worden dat de punten van E inwendige punten van $\sum_n$ zijn). Beschouw de verschillen $f_n(x) - f(x)$. Het gedrag van deze verschillen is gelijk aan dat van de rij $s(x) - s_n(x)$ uit het bewijs van de stelling van Fubini: dus is $f'_n(x) - f'(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), of $f'(x) = 1$. Hiermee is de stelling bewezen.

1.1.2.3. S p r o n g f u n c t i e s.

Zij $\{x_n\}$ een rij van getallen in (a, b) , en zij $\{f_n(x)\}$ een rij van functies gedefinieerd als volgt:

$$f_n(x) = 0 \text{ voor } x < x_n, \quad f_n(x_n) = u_n, \quad f_n(x) = u_n + v_n \text{ voor } x > x_n.$$

We veronderstellen dat de reeksen $\sum u_n$ en $\sum v_n$ absoluut convergeren. Dan is de reeks $\sum f_n(x)$ convergent. De som $s(x)$ heet s p r o n g f u n c t i e. We kunnen schrijven:

$$s(x) = \sum_{x_n \leq x} u_n + \sum_{x_n < x} v_n.$$

Zijn u_n en $v_n \geq 0$ ($n=1,2,\dots$), dan is $f'_n(x)=0$ (behalve in het punt $x=x_n$). Hieruit volgt, op grond van 1.1.2.1, dat b.o. $s'(x)=0$ is. We kunnen aantonen, dat deze laatste bewering ook geldig is, als niets omtrent de tekens van u_n en v_n is verondersteld. De functie $s(x)$ is namelijk een functie van begrensde variatie, en de totale variatie $T(x)$ van $s(x)$ is eveneens een sprongfunctie. Het blijkt zelfs dat $s(x)$ continu is, behalve in de punten $x=x_n$. Het belangrijke van de sprongfuncties is: elke functie van begrensde variatie kan geschreven worden als de som van een continue functie (van begrensde variatie) en een sprongfunctie.

1.1.2.4. F u n c t i e s v a n b e g r e n s d e v a r i a t i e .

Daar de totale variatie $T(x)$ van $s(x)$ (uit 1.1.2.3) een sprongfunctie is, geldt $T'(x)=0$ (b.o.). Deze bewering geldt eveneens voor een willekeurige functie van begrensde variatie.

S t e l l i n g . Is $T(x)$ de totale (onbepaalde) variatie van een functie van begrensde variatie $f(x)$, dan is b.o. $T'(x) = |f'(x)|$. Bovendien geldt: $f(x)$ en $T(x)$ hebben dezelfde continuïteitpunten en discontinuïteitpunten. De sprongen zijn gelijk (op het teken na), m.a.w.

$$T(x) - T(x-0) = |f(x) - f(x-0)|$$

$$T(x+0) - T(x) = |f(x+0) - f(x)|.$$

1.1.3. I n t e r v a l s f u n c t i e s .

1.1.3.1. I n l e i d e n d e b e s c h o u w i n g e n. Een intervalsfunctie $f(I) = f(\alpha, \beta)$ is een voorschrift volgens hetwelk aan een zeker interval $I=(\alpha, \beta)$ een ('n) getal wordt toegevoegd. Voorbeelden:

1. Zij $f(x)$ een (gewone) functie en zij ξ een getal met $\alpha < \xi < \beta$. Een intervalsfunctie is

$$f(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha) f(\xi)$$

(denk aan de theorie van de Riemann-integraal).

2. Intervalsfuncties zijn, als $f(x)$ een gewone functie is,

$$(\beta - \alpha) \sup_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x) \quad \text{en} \quad (\beta - \alpha) \inf_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x).$$

3, De absolute variatie $|f(\beta) - f(\alpha)|$ van een functie $f(x)$ is een intervalsfunctie.

4. Is $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ een kromme ($a \leq t \leq b$), zijn $\alpha \leq \beta$ twee getallen met $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$, dan is de lengte van de koorde tussen de punten met $t=\alpha$ en $t=\beta$ een intervalsfunctie.

Definitie van de integraal van een integreerbare intervalsfunctie. Zij (a, b) een interval. Dit interval denke men verdeeld in een eindig aantal deelintervallen. Is f een intervalsfunctie, dan kan men de som van alle getallen $f(\alpha, \beta)$ over deze op elkaar volgende deelintervallen bepalen. Als deze som bij toenemende fijnheid van de verdeling tot een limiet convergeert, dan heet de intervalsfunctie integreerbaar, en de limiet heet de integraal van $f(\alpha, \beta)$ over $[a, b]$:

$\int_a^b f(\alpha, \beta)$; m.a.w. bij elke $\epsilon > 0$ bestaat er een $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ zó dat $\int_a^b$ bij elke verdeling van (a, b) met fijnheid $\leq \delta$ de corresponderende som minder dan ϵ van de limiet verschilt.

Is $f(x)$ een gewone functie (punctfunctie), gedefinieerd op $[a, b]$, dan is elke intervalsfunctie $f(\alpha, \beta)$ van de vorm $f(\beta) - f(\alpha)$ integreerbaar.

Definitie van de afgeleide van een intervalsfunctie $f(\alpha, \beta)$ in een punt x . Hieronder verstaat men de limiet (zo deze bestaat) van $f(\alpha, \beta)/(\beta - \alpha)$ als het interval (α, β) zich samentrekt tot het punt x .

Is $f(\alpha, \beta)$ additief, dan is de afgeleide hiervan dezelfde als de afgeleide (in gewone zin) in een punt x van de puntfunctie $F(x) \equiv f(a, x)$.

1.1.3.2. Eerste hoofdstelling. Zij $f(\alpha, \beta)$ integreerbaar over $[a, b]$. Zij $f(\alpha, \beta) \geq 0$ en zij $\int_a^b f(\alpha, \beta) = 0$. Bewering: b.o. in $[a, b]$ bestaat de afgeleide^a van $f(\alpha, \beta)$ en is deze afgeleide gelijk aan 0. Het bewijs van deze bewering is gemakkelijk en steunt, behalve op de definitie van de integraal van een intervalsfunctie, op de stelling van Fubini (1.1.2.1).

1.1.3.3. Tweede hoofdstelling. Deze luidt: Bijna overal waar een integreerbare intervalsfunctie $f(\alpha, \beta)$ een afgeleide bezit, bezit ook de onbepaalde integraal $F(x) = \int_a^x f(\alpha, \beta) (a \leq x \leq b)$ van deze functie dezelfde afgeleide, en omgekeerd^a. Deze stelling kan men bewijzen door aan te tonen, dat de intervalsfunctie

$$g(\alpha, \beta) = |f(\alpha, \beta) - F(\beta) + F(\alpha)|,$$

waarbij $F(x)$ de onbepaalde integraal $\int_a^x f(\alpha, \beta) (a \leq x \leq b)$ is, voldoet aan de voorwaarden van de eerste hoofdstelling (1.1.3.2).

Minder opvallende, niettemin belangrijke, uitspraken zijn:

De integreerbaarheid van $f(\alpha, \beta)$ over een interval (a, b) impliceert die over elk deelinterval (c, d) .

De convergentie van de sommen $\sum f(\alpha, \beta)$, die (in het geval van integreerbaarheid) de integraal $\int f(\alpha, \beta)$ tot limiet hebben, is uniform t.o.v. de deelintervallen.

De integraal $\int f(\alpha, \beta)$ is een additieve intervalsfunctie (additiviteit t.a.v. de intervallen waarover de integraal genomen is).

1.1.3.4. De integralen van Darboux en de integraal van Riemann. De intervalsfuncties genoemd in 1.1.3.1, voorbeeld 2, geïntegreerd, geven de integralen van Darboux. Zijn deze gelijk, dan spreekt men van de integraal volgens Riemann. Stelt men

$$(\beta - \alpha) \left[\sup_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x) - \inf_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x) \right] = (\beta - \alpha) \omega(f; \alpha, \beta),$$

waarin $\omega(f; \alpha, \beta)$ de variatie (of schommeling) van $f(x)$ in (α, β) heet, dan betekent integreerbaar over (a, b) volgens Riemann: de

integraal van de intervalsfunctie $(\beta - \alpha) \omega(f; \alpha, \beta)$ over (a, b) is gelijk aan 0. Bovendien is deze functie ≥ 0 . Pas nu de stelling uit 1.1.3.2 toe. Het resultaat is: uit de integreerbaarheid van $f(x)$ volgens Riemann volgt het b.o. continu zijn van $f(x)$.

Omgekeerd geldt, indien $f(x)$ begrensd is, dat deze voorwaarde (het b.o. continu zijn van $f(x)$) voldoende is voor het integreerbaar zijn in de zin van Riemann.

1.1.3.5. S t e l l i n g v a n D a r b o u x. Deze luidt als volgt:
Zij $f(\alpha, \beta)$ een intervalsfunctie, die voldoet aan de voorwaarde

$$f(\alpha, \gamma) \leq f(\alpha, \beta) + f(\beta, \gamma)$$

voor elk drietal waarden α, β en γ met $a \leq \alpha < \beta < \gamma \leq b$. Zij verder $f(\alpha, \beta)$ continu, d.w.z. $f(\alpha, \beta) \rightarrow 0$ indien het interval $(\alpha, \beta) \rightarrow$ het punt x ($\alpha \leq x \leq \beta$). Tenslotte zij gegeven dat alle sommen $\sum f(\alpha_{k-1}, \alpha_k)$ (elke behorend bij zekere verdeling van (a, b)) een naar boven begrensde verzameling vormen, met L als k.b.g. Dan geldt: $f(\alpha, \beta)$ is integreerbaar en $\int_a^b f(\alpha, \beta) = L$.

1.1.3.6. R e c t i f i c e e r b a r e k r o m m e n. Wat is een rectificeerbare kromme? Stel $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ ($a \leq t \leq b$). De functies $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$ zijn continu verondersteld. Het interval (a, b) verdeelt men volgens

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b.$$

Aldus vindt men op de kromme de punten $P_k(t_k)$ ($k=0, 1, \dots, n$). De lengte van de gebroken lijn $P_0 P_1 \dots P_n$ zijn kleiner dan een vast getal, hoe ook de verdeling van (a, b) wordt gekozen. De kleinste van alle bovengrenzen heet de lengte van de kromme, en de kromme zelf noemt men rectificeerbaar.

Gemakkelijk is nu in te zien: nodig en voldoende voor de rectificeerbaarheid van de kromme $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$ (de functies $x(t), y=y(t), z=z(t)$ zijn continu) is, dat de functies $x(t), y(t), z(t)$ van begrensde variatie zijn.

Uit de tweede hoofdstelling (1.1.3.3) volgt nu nog: een rectificeerbare kromme bezit b.o. een raaklijn.

Past men deze eigenschappen toe op de "kromme" $x=x(t)$, $y=0$, $z=0$, dan blijkt de totale variatie $T(t)$ identiek gelijk te zijn aan de booglengte $s(t)$. Men vindt nu onmiddellijk de betrekking

$$T'(t) \equiv |x'(t)| \quad (\text{b.o.}).$$

Hierbij is in eerste instantie $x(t)$ continu (en van begrensde variatie). Aangetoond kan worden, dat de voorwaarde van continuïteit ter zijde kan worden gesteld. Hiermee is 1.1.2.4 opnieuw bewezen.

1.2. Integralen van Lebesgue.

1.2.1. Definities. Limietstellingen. Ongelijkheden.

1.2.1.1. Trapfuncties. In zijn dissertatie: *Intégrale, Longueur, Aire*, Parijs (1902) heeft Lebesgue een integraalbegrip ingevoerd dat voor de ontwikkeling van de moderne analyse sindsdien van enorme betekenis is geweest. Het uitgangspunt bij Lebesgue was het begrip maat. Geslaagde pogingen hebben getoond dat men andere wegen kan kiezen die tot hetzelfde doel leiden. Het uitgangspunt bij Riesz-Sz.Nagy is de trapfunctie. Zij (a,b) een interval, eindig of oneindig. We spreken van een trapfunctie, indien deze functie op elk van een eindig aantal in (a,b) gelegen eindige intervallen met lengte $|i_k|$ een constante waarde c_k aanneemt. De integraal van deze trapfunctie op (a,b) wordt gedefinieerd door $\sum c_k |i_k|$. We duiden een trapfunctie aan door $\varphi(x), \psi(x), \dots$ Nu gelden de volgende stellingen:

A. Geldt voor een rij $\{\varphi_n(x)\}$ van trapfuncties, dat $\varphi_n(x) \downarrow 0$ (b.o.; $n=1,2,\dots$), dan convergeert de rij van de integralen ook naar 0.

B. Geldt voor een toenemende rij $\{\varphi_n(x)\}$ van trapfuncties, dat $\sup_n \sum c_k |i_k| < \infty$, dan convergeert de rij $\{\varphi_n(x)\}$ b.o.

Stelling A kan men bewijzen door gebruik te maken van de overdekkingsstelling van Borel. Wat het bewijs van B betreft, zij opgemerkt, dat het niet moeilijk is aan te tonen, dat de verzameling van de punten x , waar $\varphi_n(x)$ divergeert, de maat 0 heeft.

1.2.1.2. Sommeerbare functies.

Met C_0 duiden we de klasse van de trapfuncties aan en met C_1 de klasse van de functies die (b.o.) de limiet zijn van een rij van trapfuncties $\{\varphi_n(x)\}$ zoals beschouwd in stelling 1.2.1.1.B. Uit wat verondersteld is volgt dat de rij van de integralen van $\varphi_n(x)$ convergeert. Per definitie is nu

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx,$$

waarbij $f(x)$ de limiet (b.o.) van de rij $\{\varphi_n(x)\}$ is. Is $\{\psi_n(x)\}$ een andere rij trapfuncties $\psi_n(x)$ in de zin van

1.2.1.1.B, die eveneens (b.o.) $f(x)$ tot limiet heeft, dan kan men aantonen, dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n(x) dx.$$

Met C_2 duiden we de klasse van de functies aan, die elk het verschil van twee functies uit C_1 zijn. De integraal van $f_1 - f_2$ (beide functies f_1 en f_2 behoren tot C_1) is per definitie gelijk aan

$$\int_a^b \{f_1(x) - f_2(x)\} dx = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx.$$

Uit de definitie volgt: is $f_1 - f_2 = g_1 - g_2$ (f_1, f_2, g_1 en $g_2 \in C_1$), dan zijn de integralen dezer verschillen ook gelijk. Gemakkelijk bewijst men:

C_2 is een lineaire klasse: uit $h_1(x)$ en $h_2(x) \in C_2$ volgt, dat $c_1 h_1(x) + c_2 h_2(x) \in C_2$ (c_1 en c_2 constanten).

De beschouwde integraal is een additieve intervalsfunctie.

Behoort $h(x)$ tot de klasse C_2 (anders gezegd: is $h(x)$ sommeerbaar (Lebesgue), dan geldt dit ook van $|h(x)|$, $h^+(x)$ en $h^-(x)$.

Evenmin is het moeilijk om te bewijzen:

Bij elke sommeerbare functie $h(x)$ bestaat er een rij trapfuncties $\varphi_n(\cdot)$ zó dat $\varphi_n(x) \rightarrow f(x)$ (b.o.) en

$$\int_a^b |h(x) - \varphi_n(x)| dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Verder geldt: bestaat de Riemann-integraal van $f(x)$ (over een eindig interval (a, b)), dan behoren de functies $f(x)$ en $-f(x)$ tot de klasse C_1 . Omgekeerd, is aan deze laatste voorwaarden voldaan, dan is $f(x)$ b.o. gelijk aan een Riemann-integreerbare functie.

De stelling van E. Levi over de termsgewijze integratie van een toenemende rij. Deze stelling dateert van 1906 en luidt:

Vormen de integralen van de sommeerbare functies $h_n(x)$ van een toenemende rij $\{h_n(x)\}$ een begrensde verzameling, dan convergeert deze rij (b.o.) naar een sommeerbare functie $f(x)$ en geldt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b h_n(x) dx.$$

Hieruit volgt: De reeks $\sum k_n(x)$, waarbij $k_n(x)$ sommeerbaar

is ($n=1,2,\dots$) en

$$\sum \int_a^b |k_n(x)| dx < \infty,$$

convergeert b.o. naar een sommeerbare functie $s(x)$ en

$$\int_a^b s(x) dx = \sum \int_a^b k_n(x) dx.$$

Uit de laatste stelling volgt:

Als $\int_a^b |k(x)| dx = 0$, dan is $k(x)=0$ (b.o.).

Tenslotte hebben wij:

Als een monotone rij van sommeerbare functies $\{h_n(x)\}$ naar een sommeerbare functie $f(x)$ convergeert, is

$$\int_a^b f(x) dx = \lim \int_a^b h_n(x) dx.$$

1.2.1.4. S t e l l i n g v a n L e b e s g u e o v e r d e t e r m g e w i j z e i n t e g r a t i e v a n e e n g e m a j o r e e r d e r i j (Zie H. Lebesgue, Sur l'intégration des fonctions discontinues, Ann.Ec.Norm.Sup.,27(1910)). Deze luidt:

Als de functies $f_n(x)$, die sommeerbaar zijn in (a,b) , b.o. naar een functie $f(x)$ convergeren en als er bovendien een sommeerbare functie $g(x)$ bestaat zó dat $|f_n(x)| \leq g(x)$, dan is $f(x)$ ook sommeerbaar en

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x).$$

Arzela (1885,1900) en Osgood (1897) hebben overeenkomstige stellingen bewezen: de eerste betreffende een begrensde rij van Riemann-integreerbare functies, en de tweede over een begrensde rij van continue functies.

Wat het bewijs van de stelling van Lebesgue betreft: uitgaande van de convergente rij $\{f_n(x)\}$ kan men monotone rijen vinden, die naar $f(x)$ convergeren:

$$g_n(x) = \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), \dots) \downarrow f(x),$$

$$h_n(x) = \inf(f_n(x), f_{n+1}(x), \dots) \uparrow f(x).$$

$g_n(x)$ en $h_n(x)$, en dus ook $f(x)$, zijn sommeerbaar. Uit $h_n(x) \leq f_n(x) \leq g_n(x)$ volgt

$$\int_a^b h_n(x) dx \leq \int_a^b f_n(x) dx \leq \int_a^b g_n(x) dx.$$

Daar verder

$$\int_a^b g_n(x) dx \text{ en } \int_a^b h_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx,$$

volgt

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

1.2.1.5. Stellingen over de sommeerbaarheid van een limietfunctie.

Uit de stelling van 1.2.1.4 kan men afleiden:

Als de functies $f_n(x)$ ($n=1,2,\dots$) sommeerbaar zijn in (a,b) en b.o. naar een functie $f(x)$ convergeren zó dat $|f(x)| \leq g(x)$, waarbij $g(x)$ sommeerbaar is, dan is $f(x)$ ook sommeerbaar.

Om deze stelling aan te tonen, is het voldoende de stelling van Lebesgue (1.2.1.4) toe te passen op de rij functies

$$\inf \{ g(x), \sup [f_n(x), -g(x)] \} \rightarrow f(x).$$

Een voor het vervolg belangrijke stelling is die over de sommeerbaarheid van een samengestelde functie:

Zij $g(u_1, u_2, \dots, u_n)$ een continue functie. Zij verder gegeven dat $f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x)$ in (a,b) sommeerbare functies zijn. Zij tenslotte $h(x)$ een sommeerbare functie met

$$| g\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x)\} | \leq h(x).$$

Dan is

$$G(x) = g\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x)\}.$$

sommeebaar in (a,b) .

Een andere om z'n toepassingen eveneens belangrijke stelling is het

Lemma van Fatou (Zie: Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math., 30 (1906)): Zijn de functies $f_n(x) \geq 0$ en sommeerbaar in (a,b) , als $f_n(x) \rightarrow f(x)$ (b.o.) en de rij der integralen $\int_a^b f_n(x) dx$ begrensd is, dan is $f(x)$ sommeerbaar en

$$\int_a^b f(x) dx \leq \liminf \int_a^b f_n(x) dx;$$

of ook:

Als de functies $f_n(x) \geq 0$ en sommeerbaar in (a, b) zijn, en als $f_n(x) \rightarrow f(x)$ (b.o.) en als bovendien $\int_a^b f_n(x) dx \leq A$ ($n=1, 2, \dots$), dan is $f(x)$ sommeerbaar en

$$\int_a^b f(x) dx \leq A.$$

1.2.1.6. O n g e l i j k h e d e n.

De ongelijkheid van Schwarz:

$$\left| \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx \right|^2 \leq \int_a^b f_1^2(x) dx \int_a^b f_2^2(x) dx.$$

Het gelijktteken geldt in het geval dat f_1 en f_2 b.o. een constante factor verschillen.

De ongelijkheid van Hölder:

$$\left| \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx \right| \leq \left\{ \int_a^b |f_1(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_a^b |f_2(x)|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}};$$

hierbij is $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$, $q > 1$.

Het gelijktteken geldt indien $|f_1|^p$ en $|f_2|^q$ b.o. een constante factor verschillen en als bovendien het teken van $f_1(x)f_2(x)$ b.o. constant is.

De ongelijkheid van Minkowski:

$$\left\{ \int_a^b |f_1 + f_2|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \int_a^b |f_1|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_a^b |f_2|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (p > 1).$$

Verondersteld is, dat alle integralen optredend in bovengenoemde ongelijkheden bestaan. Het is niet voldoende alleen de sommeerbaarheid van de functies f_1 en f_2 te veronderstellen. Zo o.a. bestaat de integraal in het linkerlid van de ongelijkheid van Schwarz, indien de sommeerbaarheid van f_1, f_2 en hun kwadraten gegeven is. Die in het linkerlid van de tweede ongelijkheid indien de sommeerbaarheid van $f_1, f_2, |f_1|^p$ en $|f_2|^q$ verondersteld is.

1.2.1.7. M e e t b a r e v e r z a m e l i n g e n e n m e e t b a r e f u n c t i e s.

Onder een meetbare functie verstaan we een functie, die de limiet b.o. is van een rij trapfuncties.

Uit deze definitie volgt: een sommeerbare functie is meetbaar; de constante functie is meetbaar; elke meetbare functie,

die absoluut genomen een sommeerbare functie als majorant heeft, is sommeerbaar; wordt een meetbare functie aan de boven- en onderkant "afgehakt" door sommeerbare functies, dan is de afgehakte functie sommeerbaar; is $f(x)$ meetbaar dan is $|f(x)|$ meetbaar, en is bovendien b.o. $f(x) \neq 0$, dan is $1/f(x)$ meetbaar; zijn $f(x)$ en $g(x)$ meetbaar, dan zijn $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\sup\{f(x), g(x)\}$ en $\inf\{f(x), g(x)\}$ meetbaar; zijn de functies van de rij $f_n(x)$ meetbaar, en is $f_n(x) \rightarrow f(x)$ (b.o.), dan is $f(x)$ meetbaar.

Onder een meetbare verzameling e verstaat men een verzameling waarvan de karakteristieke functie $e(x)$ meetbaar is ($e(x)=1$ als $x \in e$ en $e(x)=0$ overigens). Is $e(x)$ sommeerbaar, dan is (per definitie) de maat $m(e)$ van e de integraal van de karakteristieke functie $e(x)$. Is $e(x)$ meetbaar, zonder sommeerbaar te zijn, dan is de maat $m(e)$ (per definitie) ∞ .

Uit het bovenstaande volgt: een interval is meetbaar en de maat is gelijk aan z'n lengte (eindig of ∞); een verzameling van de maat 0 bezit een maat 0 (in bovengenoemde zin); zijn

$e_1, e_2, \dots$ meetbare verzamelingen, dan zijn $e_1 - e_2$ ($e_2 \subset e_1$),

$\bigcap_{k=1}^n e_k$, $\bigcap_{k=1}^{\infty} e_k$, $\bigcup_{k=1}^n e_k$ en $\bigcup_{k=1}^{\infty} e_k$ meetbaar; de maat $m(e)$ is een af-telbaar-additieve verzamelingsfunctie, d.w.z.

$m(e_1 \cup e_2 \cup \dots) = m(e_1) + m(e_2) + \dots$ (de $e_1, e_2, \dots$ zijn meetbaar en twee aan twee disjunct); is $e_1, e_2, \dots$ een toenemende rij meetbare verzamelingen, dan is

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} e_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(e_k);$$

is $e_1, e_2, \dots$ een afnemende rij meetbare verzamelingen, dan is

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} e_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(e_k).$$

Er bestaat een intieme relatie tussen meetbare verzamelingen en meetbare functies.

Als $f(x)$ meetbaar is, dan zijn voor elke c de verzamelingen der punten x waarvoor

$$f(x) \leq c; f(x) < c; f(x) \geq c; f(x) > c$$

meetbaar. Omgekeerd is één van laatstgenoemde verzamelingen (voor elke c) meetbaar, dan zijn de overige verzamelingen meetbaar en is ook $f(x)$ een meetbare functie.

1.2.2. Onbepaalde integralen; absoluut continue functies.

1.2.2.1. Totale variatie; afgeleide van de onbepaalde integraal.

S t e l l i n g . De onbepaalde integraal $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ (op een additieve constante na) van een sommeerbare functie $f(x)$ is van begrensde variatie; de totale variatie T van $F(x)$ over (a,b) is gelijk aan

$$\int_a^b |f(x)| dx.$$

Dat $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ van begrensde variatie is, indien $f(x) \geq 0$ is, is duidelijk ($a \leq x \leq b$); immers nu is $F(x)$ monotoon-niet-dalend. Voldoet $f(x)$ niet aan genoemde voorwaarde, dan schrijven we $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$. De integralen van deze functies zijn weer van begrensde variatie, enz. Het bewijs van het tweede deel van de stelling is minder eenvoudig. Allereerst kan men aantonen, dat voor elke trapfunctie $\varepsilon(x)$ met $|\varepsilon(x)| \leq 1$, geldt:

$$T = \sup_{|\varepsilon(x)| \leq 1} \int_a^b \varepsilon(x)f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Door een geschikte rij van functies $\varepsilon_n(x)$ te kiezen met $\lim \varepsilon_n(x)f(x) = |f(x)|$ vindt men

$$\lim \int_a^b \varepsilon_n(x)f(x)dx = \int_a^b |f(x)| dx,$$

waarmee de stelling bewezen is.

Daar $F(x)$ van begrensde variatie is, bestaat b.o. de afgeleide $F'(x)$. Analooq aan het resultaat in de klassieke analyse geldt de volgende

S t e l l i n g . Een sommeerbare functie is b.o. gelijk aan de afgeleide van z'n onbepaalde integraal.

De uitspraak van de stelling geldt indien de functie een trapfunctie is. Behoort de sommeerbare functie $f(x)$ tot de klasse C_1 , dan is $\varphi_n(x)$ (trapfunctie) $\uparrow f(x)$ of

$$f(x) = \varphi_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \{ \varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x) \}.$$

We passen nu de stelling van Fubini toe op de integralen van het linker- en het rechterlid.

Het algemene geval ($f(x)$ is sommeerbaar) volgt hieruit gemakkelijk.

1.2.2.2. Een strikt-monotone continue functie, waarvan de afgeleide b. o. gelijk is aan 0.

Zij t een getal met $0 < t < 1$. Beschouw nu de rij functies $F_n(x)$, gedefinieerd op $[0,1]$ als volgt:

$$F_0(x) = x$$

$$F_{n+1}(x) = F_n(x) \text{ in de punten } k2^{-n} \text{ (} k=0,1,\dots,2^n \text{)};$$

zijn α en β twee van zulke op elkaar volgende punten, dan is

$$F_{n+1}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{1-t}{2} F_n(\alpha) + \frac{1+t}{2} F_n(\beta);$$

overigens verloopt $F_{n+1}(x)$ lineair ($n=0,1,\dots$).

Men kan nu bewijzen, dat de rij $F_n(x)$ convergeert naar een limietfunctie $F(x)$, dat $F(x)$ continu en strikt-monotoon is, en dat b.o. $F'(x)=0$.

Het blijkt dus dat er functies zijn, die niet gelijk zijn aan de integraal van haar b.o. bestaande afgeleide.

1.2.2.3, Absoluut continue functies.

Waardoor onderscheiden zich nu functies, die onbepaalde integralen zijn, van b.v. functies, die continu zijn en van begrensde variatie? Het antwoord is: een nodige en voldoende voorwaarde, dat $F(x)$ een onbepaalde integraal is, is de absolute continuïteit van $F(x)$. We beschouwen eindige intervallen (a,b) . $F(x)$ is absoluut continu betekent: bij elke $\varepsilon > 0$ is er een $\delta = \delta(\varepsilon)$ zó dat als, $\sum (\beta_k - \alpha_k) < \delta$, geldt:

$$\left| \sum [F(\beta_k) - F(\alpha_k)] \right| < \varepsilon$$
(de intervallen van de rij (α_k, β_k) zijn disjunct). Men kan aantonen dat de laatstgenoemde betrekking vervangen kan worden door $\sum |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| < \varepsilon$. Ook kan men zich beperken tot een eindig aantal intervallen (α_k, β_k) . Duidelijk is: voldoet $F(x)$ aan de voorwaarde van Lipschitz: $|F(\beta) - F(\alpha)| \leq C(\beta - \alpha)$, dan is $F(x)$ absoluut continu.

Om te bewijzen dat de voorwaarde n o d i g beschouwen men eerst het geval dat $f(x)$ begrensd is. Dan voldoet $F(x)$ aan de voorwaarde van Lipschitz. Is $f(x)$ niet begrensd, dan kan men $f(x)$ schrijven als de som van een sommeerbare begrensde functie $g(x)$ en een functie $h(x)$, waarvoor geldt dat

$\int_a^b |h(x)| dx$ kleiner is dan een voorafgegeven positief getal. Vervolgens integreert men deze som over een geschikt gekozen rij (α_k, β_k) .

Om te bewijzen, dat de voorwaarde voldoende is, merken we eerst op, dat uit de voorwaarde volgt, dat $F(x)$ van begrensde variatie is. Tevens zien we dat de onbepaalde totale variatie $T(x)$ van $F(x)$ absoluut continu is, en dat dit ook het geval is met de positieve en negatieve variaties $\frac{1}{2}\{T(x)+F(x)\}$ en $\frac{1}{2}\{T(x)-F(x)\}$. We beperken ons daarom tot een niet-dalende functie $F(x)$.

Uit het lemma van Fatou volgt, dat $F'(x)$ sommeerbaar is, en ook, dat, als $G(x)$ de onbepaalde integraal van $F'(x)$ is,

$$G(\beta) - G(\alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} F'(x) dx \leq F(\beta) - F(\alpha).$$

$G(x)$ is dus absoluut continu. Dit geldt ook van de monotoon-niet-dalende functie $F(x) - G(x)$. De afgeleide $F'(x) - G'(x)$ is b.o. gelijk aan 0.

Het komt er dus op aan te bewijzen, dat de voorwaarde voldoende is in het geval van een niet-dalende, absoluut continue functie $F(x)$ met b.o. $F'(x) = 0$. Er volgt dat $F(x)$ een constante is. Dit is aangetoond in 1.1.3.4, waar echter de voorwaarde iets strenger is: de functie voldoet aan de voorwaarde van Lipschitz. Het is gemakkelijk het bewijs geldig te maken in het geval dat de functie absoluut continu is.

Uit bovengenoemde redenering volgt nog:

Elke monotone continue functie $F(x)$ kan geschreven worden als de som van twee monotone continue functies $G(x)$ en $H(x)$, zó dat $G(x)$ absoluut continu is, en $H'(x) = 0$ (b.o.) ($H(x)$ wordt wel een singuliere functie genoemd).

Een monotone functie (en ook een functie van begrensde variatie) kan geschreven worden als de som van een absoluut continue functie, een singuliere functie en een sprongfunctie.

D e f i n i t i e s: De totale variatie van een continue functie $F(x)$ v.b.v. op een rij disjuncte intervallen is de som van de totale variaties van $F(x)$ gevormd op deze intervallen.

Een verzameling e is een verzameling met variatie 0 t.o.v. $F(x)$ (continu en v.b.v.) als e kan worden overdekt door rijen intervallen waarop de totale variatie van $F(x)$ willekeurig klein wordt.

Hieruit volgt: een verzameling e is een verzameling met variatie 0 t.o.v. strikt-monotone en continue $F(x)$ als de afbeeldingsverzameling op de y -as, verkregen door $y=F(x)$ de maat 0 heeft.

We kunnen nu aantonen, dat we in de definitie van absolute continuïteit de veronderstelling, dat de totale variatie willekeurig klein wordt op rijen van intervallen met voldoende kleine totale lengte, vervangen kan worden door: de totale variatie van $F(x)$ op een verzameling met een maat 0 is eveneens gelijk aan 0. Dat de eerste definitie de tweede impliceert is duidelijk. Dat de tweede definitie equivalent is met de eerste kan men door een indirecte bewijsvoering aantonen. Zij $F(x)$ monotoon-niet-dalend. Voldoet $F(x)$ wèl aan de tweede, en niet aan de eerste eis, dan bestaat er een $\varepsilon > 0$ zó dat er rijen van intervallen bestaan met totale lengte opv. kleiner dan $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ terwijl de afbeeldingen ervan een totale lengte hebben $> \varepsilon$. Het is nu niet moeilijk een verzameling van de maat 0 te construeren waarvan de afbeelding (m.b.v. $y=F(x)$) een totale lengte $> \varepsilon$ bezit. Daarmee is een tegenspraak bereikt. Tenslotte ziet men in, doordat een functie v.b.v. als het verschil van twee monotoon-niet-dalende functies geschreven kan worden, dat de bewering ook vooreen continue functie v.b.v. geldt.

2.2.4. De regel van de partiële integratie en de substitutieregel.

Stelling. Zijn $f(x)$ en $g(x)$ sommeerbare functies in het interval (a,b) , en zijn $F(x)$ en $G(x)$ hun onbepaalde integralen, dan zijn de functies $F(x)g(x)$ en $G(x)f(x)$ sommeerbaar en geldt:

$$\int_a^b F(x)g(x)dx + \int_a^b G(x)f(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Dat deze laatste betrekking juist is, indien $f(x)$ en $g(x)$ constanten zijn, is duidelijk. Eveneens, indien $f(x)$ en $g(x)$ trapfuncties zijn. Door limietovergang toont men de juistheid aan indien $f(x)$ en $g(x)$ positief zijn en tot de klasse C_1 behoren. Tenslotte, zijn $f(x)$ en $g(x)$ sommeerbaar, dan kan men schrijven: $f(x)=f_1-f_2$, waarbij f_1 en f_2 positief zijn en tot C_1 behoren.

Korter is het bewijs indien men gebruik maakt van het feit dat $F(x)$ en $G(x)$ absoluut continu zijn, waaruit men afleidt dat het product $F(x)G(x)$ eveneens deze eigenschap bezit, en van de regel voor het differentiëren van een product:

$$\{F(x)G(x)\}' = F'(x)g(x) + G'(x)f(x).$$

De substitutieregel luidt:

S t e l l i n g. Zij $x(t)$ toenemend en absoluut continu in $\alpha \leq t \leq \beta$
en zij $f(x)$ sommeerbaar in $x(\alpha)=a \leq x \leq b=x(\beta)$. Dan is $f\{x(t)\} x'(t)$
sommeerbaar in $\alpha \leq t \leq \beta$ en geldt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\{x(t)\} x'(t)dt.$$

Gemakkelijk ziet men in dat de stelling geldt als $f(x)$ een constant is, ook als $f(x)$ een trapfunctie is. Stel dat $f(x)$ tot de klasse C_1 behoort. Dan is er een rij trapfuncties: $\varphi_n(x) \uparrow f(x)$ (b.o.). Nu toont men aan, dat b.c. $\varphi_n\{x(t)\} x'(t) \uparrow f\{x(t)\} x'(t)$. Volgens de stelling van B. Levi (1.2.1.3) is nu de limietfunctie sommeerbaar en is

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_n\{x(t)\} x'(t)dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f\{x(t)\} x'(t)dt. \end{aligned}$$

Voor functies $f(x)$ van de klasse C_2 geldt dit resultaat ook, daar deze functies geschreven kunnen worden als verschillen van functies behorend tot de klasse C_1 .

2.2.5. De integraal als verzamelingsfunctie.
 Zij $f(x)$ gedefinieerd in elk punt x van een verzameling e . Overigens kan $f(x)=0$ genomen worden. Ligt e in een interval en integreert men de functie $f(x)e(x)$ over dit interval, dan (zo deze integraal bestaat is de uitkomst per definitie de integraal van $f(x)$ over de verzameling e :

$$F(e) = \int_e f(x)dx.$$

Deze integraal bestaat o.a. als $f(x)$ sommeerbaar is (op het e omsluitende interval); het is zelfs voldoende als de verzameling van de punten x met $f(x) \neq 0$ meetbaar is.

Is $f(x)$ sommeerbaar op e , dan is $f(x)$ ook sommeerbaar op elke meetbare deelverzameling van e .

De maat van een verzameling e is gelijk aan de integraal $\int_e 1 dx$. Een belangrijke s t e l l i n g is:

Als $e_1, e_2, \dots$ disjuncte meetbare verzamelingen zijn en als $f(x)$ meetbaar is op $e_1 \cup e_2 \cup \dots$, dan is

$$F(e_1 \cup e_2 \cup \dots) = F(e_1) + F(e_2) + \dots,$$

m.a.w. de integraal $F(e)$ is een aftelbaar-additieve verzamelingsfunctie.

Verder geldt:

Bij elke $\varepsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zó dat, als $m(e) < \delta$, de absolute waarde van de integraal $|F(e)| < \varepsilon$. (A b s o l u t e c o n t i - n u ï t e i t v a n d e o n b e p a a l d e i n t e g r a a l). Deze stelling bewijst men door $f(x)$ te splitsen in twee delen, een functie $g(x)$, die sommerbaar en begrensd is, en een functie $h(x)$ zó dat de integraal van $|h(x)|$ willekeurig klein is.

1.2.3. De ruimten L^2 en L^p ; lineaire functio-
nalen.

1.2.3.1. De ruimte L^2 . We beschouwen meetbare functies $f(x)$ gedefinieerd op een verzameling E met een eindige of een oneindige maat. We laten toe dat $f(x)$ complexe waarden kan aannemen. We veronderstellen dat $|f|^2$ sommeerbaar is; dan is ook $f(x)$ sommeerbaar op deelverzamelingen die een eindige maat hebben (immers $|f| \leq \frac{1}{2}(1+|f|^2)$, of ook op grond van de ongelijkheid van Schwarz, die eveneens de sommeerbaarheid van fg impliceert als die van $|f|^2$ en $|g|^2$ gegeven zijn).

Definitie: Het scalair product van f en g is

$$(f, g) = \int_E f(x) \overline{g(x)} dx,$$

en de norm van f is

$$\|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}} = \left\{ \int_E |f(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Dus: $\|f\| > 0$ behalve wanneer $f(x)=0$ (b.o.). Uit de definities volgt verder

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|,$$

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|,$$

$$\|f_1 - f_3\| \leq \|f_1 - f_2\| + \|f_2 - f_3\| \quad (\text{driehoeksongelijkheid}),$$

$$\overline{(g, f)} = (f, g).$$

Is λ een constante, dan is

$$(\lambda f, g) = \lambda (f, g) = (f, \bar{\lambda} g) \text{ en } \|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|.$$

Wij vatten deze eigenschappen samen door te zeggen dat de beschouwde functies $f(x)$ tot de (complexe) functionaalruimte L^2 behoren.

Definitie: De rij $\{f_n(x)\}$ ($n=1, 2, \dots$) convergeert in gemiddelde (of: convergeert sterk) naar een limietfunctie f als $\|f - f_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Het analogon van de convergentiestelling van Cauchy is het

Theorema van Riesz - Fischer. Nodig en voldoende voor het sterk convergeren van de rij $\{f_n(x)\}$ is, dat $\|f_m - f_n\| \rightarrow 0$ als $m, n \rightarrow \infty$.

Het nodige van de voorwaarde is direct duidelijk. Het bewijs van het voldoende zijn van de voorwaarde steunt op de ongelijkheid van Schwarz, de stelling van Levi en het lemma van Fatou (zie Riesz-Sz.Nagy).

1.2.3.2. Z w a k k e c o n v e r g e n t i e.

Geldt van een rij f_n , dat f_n in gemiddelde naar f convergeert, dan is $(f_n, g) \rightarrow (f, g)$ voor elke g uit L^2 . Immers

$$|(f, g) - (f_n, g)| = |(f - f_n, g)| \leq \|f - f_n\| \cdot \|g\| \rightarrow 0.$$

Het omgekeerde is niet waar (beschouw de rij $f_n(x) = \sin nx$ ($0 \leq x \leq \pi$)). Geldt voor elke g uit L^2 dat $(g, f_n) \rightarrow (g, f)$, dan zegt men: f_n convergeert zwak naar 0 .

Merk op: het sterk convergeren van $f_n(x)$ naar $f(x)$ impliceert: $\|f_n\| \rightarrow \|f\|$. Aan deze laatste betrekking behoeft niet voldaan te zijn als $f_n(x)$ zwak naar $f(x)$ convergeert. Immers voor de rij $\{\sin nx\}$ geldt: $\|f_n\| = (\frac{1}{2}\pi)^{\frac{1}{2}}$; $\|f\| = 0$.

Zwakke convergentie gecombineerd met de betrekking $\|f_n\| \rightarrow \|f\|$ geeft sterke convergentie.

Wèl geldt steeds in het geval van zwakke convergentie:

$$\|f\| \leq \liminf \|f_n\|.$$

1.2.3.3. L i n e a i r e f u n c t i o n a l e n (l i n e a i r e o p e r a t o r e n).

Voor vaste $f(x)$ uit L^2 en variabele $g(x)$ uit L^2 is het scalaire product (f, g) een lineaire functionaal van g : deze lineaire operator voegt aan g een getal (f, g) toe. Een lineaire operator A die aan elke g een getal Ag toevoegt bezit de volgende eigenschappen (per definitie):

1°. a d d i t i v i t e i t: $A(g_1 + g_2) = Ag_1 + Ag_2$.

2°. h o m o g e n i t e i t: $A(cg) = c Ag$ (c constant).

3°. b e g r e n s d h e i d: er is een getal $M > 0$ zó dat voor alle g geldt: $|Ag| \leq M \|g\|$.

De kleinste van de grenzen M , aan te duiden door M_A of $\|A\|$ heet de norm van A .

Bij vaste f bezit (f, g) deze eigenschappen. De norm van (f, g) is $\|f\|$ (ongelijkheid van Schwarz). Een belangrijke stelling is:

S t e l l i n g v a n F r é c h e t - R i e s z (1907):
Elke lineaire operator Ag in L^2 kan geschreven worden in de vorm

$Ag = (g, f)$; de functionaal A bepaalt $f(x)$ op éénduidige manier.

1.2.3.4. Rijen van lineaire functionalen.

W.F. Osgood (1897) heeft het volgende bewezen:

S t e l l i n g. Zij $f_n(t)$ een rij van continue functies, gedefinieerd in het interval (a, b) . Zij de rij $f_n(t)$ in elk (inwendig) punt t van (a, b) begrensd. Dan bezit (a, b) een deelinterval waarop de rij uniform begrensd is.

Het analogon van deze klassieke stelling is de volgende bewering (afkomstig van Banach-Steinhaus (1927)).

S t e l l i n g. Zij $\{A_n\}$ een rij van lineaire functionalen. Als $\{A_n\}$ convergeert of begrensd is voor elk element g van L^2 , dan is de beschouwde rij uniform begrensd op de "eenheidsbol" (d.w.z. dan is de rij van de normen M_{A_n} begrensd).

Hieruit volgt: elke zwak-convergente rij $\{f_n\}$ is noodzakelijk begrensd.

1.2.3.5. De ruimte L^2 is separabel.

De separabiliteit van L^2 betekent dat er een rij elementen $\{g_n\}$ uit L^2 bestaat zó dat elke f uit L^2 in gemiddelde willekeurig dicht kan worden benaderd door eindige lineaire combinaties van elementen g_n . Het blijkt dat voor elementen van $\{g_n\}$ genomen kunnen worden de karakteristieke functies van intervallen van $(-\infty, \infty)$ met rationale eindpunten. Met behulp van de eigenschap der separabiliteit kan men bewijzen:

S t e l l i n g. Is $\{f_n\}$ een begrensde rij van elementen van L^2 , dan bevat deze rij een zwak-convergente deelrij.

1.2.3.6. Orthonormale systemen.

Een eindig of oneindig systeem $\{\varphi_n\}$ van elementen uit L^2 heet orthonormaal, als

$$(\varphi_m, \varphi_n) = 0 \text{ voor } m \neq n \text{ (orthogonaal) en}$$

$$(\varphi_n, \varphi_n) = \|\varphi_n\|^2 = 1 \text{ (genormeerd).}$$

Beschouw een eindig orthonormaal systeem $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ uit L^2 . Zij f een willekeurig element uit L^2 . We stellen de vraag: voor welke waarden der constanten $c_1, c_2, \dots, c_N$ is

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k \right\|$$

zo klein mogelijk? Het antwoord is:

$$c_k = (f, \varphi_k) \quad (k=1, 2, \dots, N).$$

Men vindt nu de betrekking

$$\left\| f - \sum_1^N (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_1^N |(f, \varphi_k)|^2$$

(de identiteit van Bessel). Uit deze betrekking volgt de ongelijkheid van Bessel:

$$\sum_1^N |(f, \varphi_k)|^2 \leq \|f\|^2.$$

Zijn $c_1, c_2, \dots, c_N$ een willekeurig stel constanten, dan is

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) \varphi_k \right\| \leq \left\| f - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k \right\|.$$

Hieruit volgt: als f willekeurig dicht benaderd kan worden door lineaire combinaties van de φ_k , dan is f zelf een lineaire combinatie van de φ_k , te weten

$$f = \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) \varphi_k.$$

We drukken dit uit door te zeggen dat de verzameling der lineaire combinaties $\sum_{k=1}^N c_k \varphi_k$ gesloten is t.o.v. de convergentie in gemiddelde. Het is ¹ onmogelijk dat deze verzameling samenvalt met L^2 .

Een verzameling van elementen uit L^2 heet compleet als elk element van de ruimte willekeurig dicht kan worden benaderd door lineaire combinaties van die verzameling.

We zagen: een eindig orthonormaal systeem kan niet compleet zijn in L^2 . Met behulp van het orthogonalisatieproces [zie E. Schmidt, Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener, Math. Annalen, '63 (1907), pp.433-476] kan men het bestaan van een complete orthonormale rij aantonen (zie Riesz-Sz.Nagy, p.67). Een voorbeeld van een compleet orthonormaal systeem in de ruimte $L^2(0,1)$ zijn de functies

$$e^{2\pi i n x} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Ook kan een compleet orthonormaal systeem niet over-aftelbaar zijn. De ruimte L^2 is daarom een ruimte met een aftelbaar-oneindige dimensie.

Belangrijk is de volgende

Stelling. Zij in L^2 een complete orthonormale rij $\{\varphi_n\}$ gegeven; dan is elk element f van L^2 te schrijven in de vorm

$$f = \sum_1^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k,$$

waarbij de convergentie die in gemiddelde is.

Het bewijs berust o.a. op de ongelijkheid van Bessel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 \leq \|f\|^2.$$

Uit de identiteit van Bessel volgt, voor een complete orthonormale rij:

$$\sum_1^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 = \|f\|^2$$

(formule van Parseval). Deze betrekking is een bijzonder geval van de volgende:

$$\sum_1^{\infty} (f_1, \varphi_k) \overline{(f_2, \varphi_k)} = (f_1, f_2),$$

met f_1 en f_2 uit L^2 , welke men met behulp van de eerste kan bewijzen door gebruik te maken van de betrekking:

$$4(f_1, f_2) = \|f_1 + f_2\|^2 - \|f_1 - f_2\|^2 + i\|f_1 + if_2\|^2 - i\|f_1 - if_2\|^2.$$

Tenslotte geldt de volgende

S t e l l i n g. Zij $\{\varphi_k\}$ een orthonormale rij in L^2 , en zij $\{a_n\}$ een rij getallen zó dat

$$\sum_1^{\infty} |a_n|^2$$

convergeert. Dan convergeert de reeks

$$\sum_1^{\infty} a_n \varphi_n$$

(in gemiddelde) naar een functie g in L^2 en $(g, \varphi_n) = a_n$ ($n=1, 2, \dots$).

1.2.3.7. D e e l r u i m t e n v a n L^2 .

Een deelverzameling E van L^2 heet een lineaire verzameling (of een lineaire variëteit) als de lineaire combinaties van elementen van E ook in E liggen. Is deze verzameling E gesloten (m.b.t. convergentie in gemiddelde) dan heet E een deelruimte van L^2 .

Zijn $f_1, f_2, \dots, f_N$ N (vaste) elementen van L^2 , dan is de lineaire verzameling der lineaire combinaties

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_N f_N$$

gesloten en dus een deelruimte van L^2 . Voor het geval dat $f_1, f_2, \dots, f_N$ een orthonormaal systeem vormen is dit aangetoond in 1.2.3.6. Door orthogonalisatie kan men het overige geval tot dit eerste terugbrengen.

Belangrijk is de volgende

S t e l l i n g. Is E een deelruimte van L^2 , dan is elk element h van L^2 de som van een element f van E en een element g dat "loodrecht staat op E " (d.w.z. "dat loodrecht staat op alle elementen van E "). Bovendien is de splitsing $h = f + g$ éénduidig.

De eenduidigheid van de ontbinding blijkt gemakkelijk. Het bestaan ervan kan men aantonen door gebruik te maken van een orthonormale rij (in E) maar ook door inplaats van de separabiliteit van E het aanwezig zijn van een extremaal element in E te benutten: is h een element van L^2 en is d de onderste grens van de afstanden $\|h - f\|$ (f in E), dan is er een element f^* in E zó dat $\|h - f^*\| = d$.

Het bestaan van een extremaal element is al verzekerd als de verzameling E convex en gesloten is (d.w.z. met f_1 en f_2 bevat E ook $c_1 f_1 + c_2 f_2$ voor $c_1, c_2 \geq 0$, $c_1 + c_2 = 1$; eveneens bevat E de limieten van convergente (in de zin van gemiddelde) rijen van elementen die al in E liggen).

Uit het bewijs van genoemde stelling volgt: Is in L^2 (of in een deelruimte F van L^2) een verzameling E van elementen gegeven, waarvan de lineaire combinaties niet overal dicht in L^2 (of in F) liggen, dan zijn er elementen g in L^2 (of in F), $g \neq 0$, zó dat g "loodrecht staat op" alle elementen van E .

En eveneens volgt:

Is in L^2 een verzameling E van elementen gegeven, waarvan de lineaire combinaties niet overal dicht in L^2 zijn, dan vormen de elementen g van L^2 die $\perp$ de elementen van E een deelruimte, en die elementen h van L^2 die $\perp$ de elementen g vormen een deelruimte bestaande uit de lineaire combinaties van elementen van E en hun limieten; we zeggen dat deze laatste deelruimte door E opgespannen wordt. Deze deelruimte is de kleinste deelruimte die E bevat. Is f een willekeurig element van L^2 dan is f (en wel op één manier) te schrijven als de som $g + h$, waarbij g en h opvolgend behoren tot genoemde complementaire orthogonale deelruimten.

1.2.3.8. Toepassingen van de stelling (in 1.2.3.7) over de splitsing van L^2 in orthogonale deelruimten.

Het is nu mogelijk de stelling dat elke begrensde rij $\{f_n\}$ een zwak-convergente deelrij bevat (zie 1.2.3.5) te bewijzen zonder gebruik te maken van de separabiliteit van L^2 .

Een tweede toepassing betreft de uitbreiding (extension, prolongement) van een lineaire functionaal.

Stelling. Zij A een functionaal gedefinieerd op de verzameling $E \in L^2$ en zij M een zódanig getal dat voor elke lineaire combinatie van elementen van E geldt:

$$\left| \sum_1^n c_k A f_k \right| \leq M \left\| \sum_1^n c_k f_k \right\|.$$

Dan kan A worden uitgebreid tot een lineaire functionaal gedefinieerd op de hele ruimte L^2 en wel zódanig dat $M_A \leq M$.

Voor lineaire combinaties van elementen uit E definieert men A als volgt:

$$A \left(\sum_1^n c_k f_k \right) = \sum_1^n c_k A f_k.$$

Voor limieten van rijen uit E (aangevuld met lineaire combinaties) definieert men A door $A \lim f_n = \lim A f_n$. Voor elementen g uit L^2 die loodrecht staan op E zij $Ag=0$. Een willekeurig element f van L^2 is te schrijven als de som $g(\perp E) + h$ (in de afsluiting van E); vervolgens definieert men $Af=ag+Ah$.

1.2.3.9. De ruimte L^p .

Zij $f(x)$ een meetbare functie, gedefinieerd op een meetbare verzameling e . De functies $f(x)$, waarvoor $|f(x)|^p$ sommeerbaar is, vormen de ruimte L^p ($p \geq 1$). De norm $\|f\|$ van $f(x)$ wordt gedefinieerd door

$$\|f\| = \left[\int_e |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

De driehoeksongelijkheid $\|f_1+f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$ geldt (ongelijkheid van Minkowski, zie 1.2.1.6).

We spreken ook van de ruimte L^∞ , d.i. de verzameling van alle meetbare begrensde functies (of functies die b.o. gelijk zijn aan een begrensde functie). De norm $\|f\|$ is in dit laatste geval de kleinste van de waarden M waarvoor $|f(x)| \leq M$ (b.o.) Men bewijst gemakkelijk, dat de hierboven bij willekeurige $p \geq 1$

gedefinieerde norm convergeert naar M bij $p \rightarrow \infty$ (verondersteld dat $m(e) < \infty$).

Zijn p en q twee getallen met $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($p \geq 1$, $q \geq 1$), behoort $f(x)$ tot L^p en $g(x)$ tot L^q , dan is (per definitie) het scalaire product

$$(f, g) = \int_e f(x)g(x)dx,$$

waarbij verondersteld is dat f en g reële functies zijn. Volgens de ongelijkheid van Hölder is (zie 1.2.1.6)

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

Voor $p \geq 1$ laat zich convergentie in gemiddelde op overeenkomstige wijze als voor $p=2$ definiëren. De optredende normen $\|f - f_n\|$, $\|f_n - f_m\|$ zijn gedefinieerd als in het begin van deze paragraaf. Het analogon van de stelling van Cauchy (het theorema van Riesz-Fischer) geldt ook hier. Het geval $p=1$ laat zich heel eenvoudig bewijzen. In het andere grensgeval $p=\infty$ gaat het feitelijk over het uniform convergeren van een rij functies.

Men zegt dat in L^p ($1 \leq p < \infty$) de rij $\{f_n\}$ zwak convergeert naar f , als voor elke g in L^q geldt:

$$(f_n, g) = \int_e f_n(x)g(x)dx \rightarrow (f, g).$$

Het product (f, g) (f vast in L^p , g variabel in L^q) is weer een lineaire functionaal. Voor $1 \leq q < \infty$ (en de beschouwde functies reëel verondersteld) is deze bewering omkeerbaar: elke lineaire functionaal kan geschreven worden in de vorm van een inwendig product (f, g) waarbij de genererende functie $f(x)$ tot L^p behoort. Deze omkering behoeft niet te gelden voor $q=\infty$ (zie Riesz-Nagy).

1.2.3.10. S t e l l i n g. Als de rij $\{f_n\}$ van elementen in L^p ($1 < p < \infty$) zwak convergeert naar f , en als bovendien $\|f_n\| \rightarrow \|f\|$, dan convergeert $\{f_n\}$ ook in gemiddelde naar f .

Het bewijs van deze stelling in het geval $p \neq 2$ vereist meer moeite dan in het geval $p=2$ (zie 1.2.3.2). In het geval $p \geq 2$ verloopt de redenering als volgt. Voor alle reële waarden van z geldt

$$|1+z|^p \geq 1 + p^{z+c} |z|^p,$$

waarbij c een van z onafhankelijke positieve constante is. Ver-

vang nu z door de uitdrukking $(f_n(x)-f(x))/f(x)$, vermenigvuldig met $|f(x)|^p$ en integreer over de beschouwde verzameling e . Men vindt nu:

$$\int_e |f_n|^p dx \geq \int_e |f|^p dx + p \int_e |f|^{p-2} f(f_n - f) dx + \int_e |f_n - f|^p dx.$$

Gebruikmakend van de gegevens komt men tot de betrekking

$$\int_e |f_n - f|^p dx \rightarrow 0,$$

waarmee de stelling (in het geval $p \geq 2$) bewezen is.

Op overeenkomstige manier bewijst men het resterende geval.

1.2.3.11. E e n s t e l l i n g v a n B a n a c h e n S a k s (Sur la convergence forte dans les espaces L^p , *Studia Math.*,² (1930), 51-57).

S t e l l i n g. Zij $\{f_n\}$ een in L^p naar f zwak-convergerende rij. Nu bestaat er een deelrij $\{f_{n_k}\}$ zó dat

$$(f_{n_1} + f_{n_2} + \dots + f_{n_k})/k$$

in gemiddelde naar f convergeert.

Voor $p=2$ verloopt het bewijs als volgt. Zonder de algemeenheid te schaden kan men $f=0$ veronderstellen (vervang f_n door $f_n - k$). Kies $n_1=1$. Daar $(f_1, f_n) \rightarrow 0$ is er een index n_2 zó dat $|(f_1, f_{n_2})| \leq 1$; evenzo is er een index n_3 zó dat $(f_{n_1}, f_{n_3}) \leq \frac{1}{2}$, $(f_{n_2}, f_{n_3}) \leq \frac{1}{2}$; enz. Zij verder $\|f_n\| \leq B$. Dan is

$$\begin{aligned} \|(f_{n_1} + \dots + f_{n_k})/k\|^2 &\leq (kB^2 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} + \dots + 2(k-1))/(k-1)/k^2 \\ &\leq (B^2 + 2)/k \rightarrow 0. \end{aligned}$$

1.3. Integralen van Stieltjes en generalisaties.

1.3.1. Lineaire functionalen in de ruimte van de continue functies.

1.3.1.1. De integraal van Stieltjes. Zij $f(x)$ continu in $[a, b]$ en zij $\alpha(x)$ een niet-afnemende functie. Zij

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

een verdeling van $[a, b]$. De limiet van de sommen

$$\Sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) [\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})] \quad (x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k),$$

indien $\max(x_k - x_{k-1}) \rightarrow 0$, bestaat en heet de integraal van Stieltjes van f t.o.v. α . Het symbool

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x) d\alpha(x)$$

stelt deze integraal voor.

Men kan deze uitkomst ook beschouwen als de integraal van een intervalsfunctie.

Algemener kan men aannemen dat $\alpha(x)$ van begrensde variatie is. Door splitsing in reële en imaginaire delen kan men het begrip integraal van Stieltjes uitbreiden tot complexe continue functies $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ en complexe functies van begrensde variatie $\alpha(x) = \alpha_1(x) + i\alpha_2(x)$: men beschouwe de lineaire combinaties van de integralen $\int_a^b f_j(x) d\alpha_k(x)$ ($j, k=1, 2$). Er bestaat zoals we in het vervolg zullen zien een nauwe betrekking tussen de gedefinieerde integralen en een speciale klasse van lineaire functionalen.

1.3.1.2. Lineaire functionalen in de C -ruimte.

C is de verzameling van de reële continue functies in het interval $a \leq x \leq b$. De operatie A die aan elk element f van C een reeel getal Af toevoegt heet een lineaire functional als deze operatie

1) additief: $A(f_1 + f_2) = Af_1 + Af_2$

2) homogeen: $A(cf) = cAf$

3) begrensd (er is een constante M zó dat $|Af| \leq M \cdot \max |f(x)|$) is.

De kleinste van deze grenzen M heet de $n o r m \quad \|A\|$ of M_A van de lineaire functionaal A .

Verder noemen we $\|f\| = \max f(x)$ de $n o r m$ van de functie $f(x)$.

De vraag rijst: kan de beschouwde lineaire functionaal worden toegepast op een grotere klasse van functies?

Eveneens: kan deze functionaal als een integraal worden geschreven?

V o o r b e e l d. Zij $Af=f(x_0)$ (x_0 vast). Het is niet mogelijk om Af in de vorm van een eerder beschouwde integraal (zie 1.2.3.3) te schrijven. Wel is

$$Af = f(x_0) = \int_a^b f(x) d\alpha(x)$$

met $\alpha(x)=0$ ($x < x_0$), $\alpha(x)=1$ ($x > x_0$), $\alpha(x_0)$ willekeurig.

Algemene behandeling van de gestelde problemen: allereerst blijkt dat de integraal $\int_a^b f d\alpha$ een lineaire functionaal is. De begrensdsheid is als volgt in te zien. Uit

$$\left| \sum \right| \leq \max |f| \cdot \text{totale variatie van } \alpha$$

volgt door limietovergang:

$$\left| \int_a^b f(x) d\alpha(x) \right| \leq \max |f| \cdot \text{totale variatie van } \alpha.$$

Zij $f_n(x)$ een rij continue functies, die toenemend is en begrensd: dus $f_n(x) \rightarrow f(x)$ begrensd. We tonen aan dat de rij Af_n convergeert.

Hoe men ook de tekens voor de vierkante haken in

$$\pm [f_2(x)-f_1(x)] \pm [f_3(x)-f_2(x)] \pm \dots$$

kiest, de partiële sommen van deze reeks zijn absoluut genomen $\leq$ de partiële sommen van de reeks

$$[f_2(x)-f_1(x)] + [f_3(x)-f_2(x)] + \dots = f(x)-f_1(x),$$

dus $\leq$ constante B . De getransformeerden (m.b.v. A) van de partiële sommen van de eerstgenoemde reeks zijn in absolute waarde $\leq M_A B$. Hetzelfde geldt voor de partiële sommen van de reeks

$$|Af_2-Af_1| + |Af_3-Af_2| + \dots$$

Deze laatste reeks convergeert absoluut, dus concluderen we tot de convergentie van

$$Af_1 + (Af_2-Af_1) + (Af_3-Af_2) + \dots,$$

dus tot die van Af_n . We duiden de limiet van Af_n aan door Af (f is niet noodzakelijk continu). Men kan bewijzen dat als de rijen $\{f_n\}$ en $\{g_n\}$ beide $\uparrow f$ convergeren de rijen $\{Af_n\}$ en $\{Ag_n\}$ naar dezelfde limiet convergeren. Veronderstel dat $f_n < f_{n+1}$, $g_n < g_{n+1}$. Het is nu mogelijk een toenemende rij van functies

$$f_{m_1} < g_{m_2} < f_{m_3} < g_{m_4} < \dots$$

te vinden die naar f convergeert. De rij der getransformeerden convergeert naar een bepaalde limiet, die dezelfde is van de rijen Af_n en Ag_n . Op deze wijze is A gedefinieerd voor elke begrensde functie die de limiet is van een toenemende rij van continue functies. Voor zulke functies geldt: $A(f+g)=Af+Ag$. Voorts definiëren we: $A(f-g)=Af-Ag$. Bewezen dient te worden dat deze "geprolongeerde" functionaal aan de eisen van additiviteit, homogeniteit en begrensdsheid voldoet.

Tot de beschouwde klasse der functies behoren ook karakteristieke functies van intervallen, evenals lineaire combinaties van functies die al tot de klasse behoren. We duiden door $f_{c,d}(x)$ de karakteristieke functie van het interval $[c,d]$ aan.

Ons doel is aan te tonen dat elke lineaire functionaal in C door een integraal van Stieltjes kan worden voorgesteld. Daartoe definiëren we eerst de functie-van-begrensde-variatie $\alpha(x)$. Stel $\alpha(a)=0$ en $\alpha(x)=Af_{a,x}$ ($a < x \leq b$). Dan is $\alpha(x)$ van begrensde variatie; immers zij

$$a_0 = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

een verdeling van het interval (a,b) . Dan is de uitdrukking $\sum_{k=1}^n |\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})|$ de waarde die de operator A toevoegt aan de functie

$$f(x) = \varepsilon_1 f_{a,x_1}(x) + \sum_{k=2}^n \varepsilon_k [f_{a,x_k}(x) - f_{a,x_{k-1}}(x)]$$

($\varepsilon_k = -1, 0$ of 1 al naar het teken van $\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$). Nu is $|f(x)| \leq 1$, dus $\sum_{k=1}^n |\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})| = Af \leq M_A$. De totale variatie van $\alpha(x)$ is dus $\leq M_A$.

Zij $f(x)$ een continue functie. Beschouw een verdeling van (a,b) als bovengenoemde. Zij ξ_k een punt van (x_{k-1}, x_k) . We construeren nu de volgende functie $\varphi(x)$ (die ook tot de uitgebreide functieklassse behoort):

$$\varphi(x) = \varepsilon_1 f_{a,x_1}(x) + \sum_{k=2}^n f(\xi_k) [f_{a,x_k}(x) - f_{a,x_{k-1}}(x)] ;$$

voor deze functie geldt:

$$A\varphi = \sum_1^n f(\xi_k) [\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})]$$

(het tweede lid is een benaderingssom uit de definitie van de integraal van Stieltjes). Is ω het maximum van de schommelingen van $f(x)$ in de intervallen (x_{k-1}, x_k) , dan heeft men $|f(x) - \varphi(x)| \leq \omega$ en $|Af - A\varphi| = |A(f - \varphi)| \leq \omega M_A$. Bij toenemende verfijning van de verdeling van het interval (a, b) geldt $\omega \rightarrow 0$, dus $A\varphi \rightarrow Af$. Bij deze limietovergang hebben we daarom

$$Af = \int_a^b f(x) d\alpha(x).$$

Hieruit, en uit de definitie van M_A volgt: de totale variatie van $\alpha(x) \geq M_A$. We hebben ook aangetoond dat de totale variatie $\leq M_A$ is. Dus geldt het gelijkteken. Bewezen is dus de volgende

S t e l l i n g. De integraal van Stieltjes $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$, waarbij $\alpha(x)$ een vaste functie van begrensde variatie is, definieert een lineaire functionaal in de ruimte C der continue functies, en omgekeerd kan elke lineaire functionaal in deze integraalvorm geschreven worden.

O p m e r k i n g. Bovengenoemde stelling blijft geldig indien $f(x)$ (norm $\|f\| = \max |f(x)|$) en $\alpha(x)$ complex zijn. Het bewijs moet aan deze situatie worden aangepast.

1.3.1.3. E e n d u i d i g h e i d v a n d e g e n e r e r e n d e f u n c t i e.

De vraag rijst: zijn er meer functies $\alpha(x)$ (van begrensde variatie) zó dat $A = \int_a^b f(x) d\alpha(x)$ voor alle continue functies? Anders: zijn er functies $\alpha(x)$ (v.b.v.) zó dat $\int_a^b f(x) d\alpha(x) = 0$ voor alle continue functies $f(x)$? Het antwoord is de volgende

S t e l l i n g. $\int_a^b f(x) d\alpha(x) = 0$ voor alle $f(x)$ uit $C \iff \alpha(x)$ (v.b.v.) is constant in alle op (a, b) liggende continuïteitpunten van $\alpha(x)$ en de uiteinden a en b .

Bewijs. $\alpha(x)$ is in elk punt, dat geen discontinuïteitspunt is, continu (zie 1.1.2.3). Zij nu c een continuïteitspunt met $a < c < b$. Door $f(x)$ als volgt te kiezen: $f(x) = 1$ op $a \leq x \leq c$, $f(x) = 0$ op $c + \frac{1}{n} \leq x \leq b$ (n voldoende groot) en overigens lineair, blijkt $\alpha(c) = \alpha(a)$. Door vervolgens $f(x) = 1$ te nemen op het gehele interval $[a, b]$ vindt men $\alpha(b) = \alpha(a)$. Is omgekeerd gegeven dat de discontinuïteitpunten van

$\alpha(x)$ een aftelbare verzameling vormen, en dus de continuïteitspunten overal dicht in (a,b) liggen, dan kan men de verdelingen van dit interval die ten grondslag liggen bij het vormen van de in de definitie van de integraal benaderende sommen zó kiezen dat de verdelingspunten continuïteitspunten zijn. De waarde van de integraal is dus 0.

O p m e r k i n g. Het voorafgaande bewijst dat de functionaal A de functie $\alpha(x)$ bepaalt in de continuïteitspunten op een additieve constante na. Gewoonlijk definieert men $\alpha(x)$ in de discontinuïteitspunten x_0 door aan $\alpha(x_0)$ een waarde toe te kennen tussen $\alpha(x_0-0)$ en $\alpha(x_0+0)$. In dit geval is de totale variatie van $\alpha(x)$ gelijk aan de norm M_A . Immers, dit geldt voor de functie $\alpha(x)$ die we in 1.3.1.2 construeerden en wegens de eenduidigheid ook voor elke andere van het beschouwde type.

1.3.1.4. U i t b r e i d i n g v a n e e n l i n e a i r e f u n c t i o -
n a a l. Zij E een deelverzameling van de reële ruimte C van de continue functies. Zij A een functionaal gedefinieerd op E . De vraag rijst of A tot een lineaire functionaal gedefinieerd op de hele ruimte C met norm M_A ($\leq M$) kan worden uitgebreid. Het antwoord is

S t e l l i n g. Een functionaal A gedefinieerd op een verzameling E van de ruimte C kan tot een lineaire functionaal op C met norm $\leq M$ worden uitgebreid, dan en alleen dan als voor elke lineaire combinatie van elementen $f_1, \dots, f_n$ van E geldt:

$$\left| \sum_1^n c_k A f_k \right| \leq M \left\| \sum_1^n c_k f_k \right\|.$$

Bewijs. Dat de in de stelling genoemde voorwaarde nodig is, is evident. We tonen aan dat de voorwaarde voldoende is. Veronderstel (gemakshalve) $M=1$. Zij g een lineaire combinatie van elementen van E . Per definitie schrijven we

$$Ag = A \sum_1^n c_k f_k = \sum_1^n c_k A f_k.$$

Deze definitie is eenduidig (zoals uit de gegeven voorwaarde volgt). De elementen g vormen een lineaire variëteit E' , en de aldus uitgebreide functionaal is additief, homogeen en begrensd.

We voegen nog andere elementen aan E' toe en wel op de volgende manier. Zij f een element van C , dat niet tot E' behoort. Zijn verder g_1 en g_2 twee willekeurige elementen uit E' , dan is

$$Ag_1 - Ag_2 = A(g_1 - g_2) \leq \|g_1 - g_2\| \leq \|g_1 - f\| + \|g_2 - f\|, \text{ zodat}$$

$$Ag_1 - \|g_1 - f\| \leq Ag_2 + \|g_2 - f\|.$$

Derhalve, bij vaste f , en variabele g (in E'), vormen de getallen $Ag - \|f - g\|$ en $Ag + \|f - g\|$ twee getalklassen, waarvan de ene geheel links van de tweede ligt. Zij Af het getal (een der getallen) gelegen tussen beide klassen, zodat

$$Ag - \|f - g\| \leq Af \leq Ag + \|f - g\|,$$

dan volgt (daar ook $-g$ tot E' behoort)

$$|Af + Ag| \leq \|f + g\|.$$

We voegen nu aan E' toe lineaire combinaties van f en elementen g (uit E') en definiëren:

$$A(cf + g) = cAf + Ag.$$

Men overtuigt er zich gemakkelijk van dat

$$|A(cf + g)| \leq \|cf + g\|,$$

en dat A (uitgebreid op de nieuwe verzameling E'') additief is, homogeen en begrensd door 1.

Voor f neme men nu opeenvolgend $1, x, x^2, \dots$; de lineaire combinaties hiervan liggen overal dicht in C (in de zin van uniforme convergentie). De functionaal A definieert men nu op hierboven beschreven wijze voor de elementen van de opnieuw uitgebreide verzameling en door passende limietovergang voor de gehele ruimte C .

De zojuist bewezen stelling is ook geldig in de ruimte der continue complexe functies. Dat in dit geval de uitbreiding van de lineaire functionaal mogelijk is hebben Bohnenblust en Sobczyk in 1938 bewezen. Verondersteld is nu dat de voorwaarde (*) geldt voor alle lineaire combinaties met complexe coëfficiënten van functies $f_1, \dots, f_n$ van E . De eerste stap is nu A uit te breiden tot de verzameling E' van de zojuist genoemde combinaties. De tweede stap is $A_1 g$ ($g \in E'$), het reële deel van Ag , te definiëren en A_1 uit te breiden op alle lineaire combinaties met reële coëfficiënten van functies van E' . Daarna breidt men A uit op alle functies van de

complexe ruimte. De laatste stap is de operator B in te voeren zó dat $Bf = A_1 f - iA_1$ (if). Dan valt B met A_1 samen op E' . Na elke gedane stap dient men er zich van te overtuigen dat de operator additief, homogeen en begrensd is, en dat aan de ongelijkheid (*) is voldaan.

1.3.1.5. A p p r o x i m a t i e s t e l l i n g. M o m e n t e n p r o b l e e m.

We veronderstellen dat de verzameling E (zie de stelling uit 1.3.1.4) bestaat uit een willekeurige verzameling E_0 waaraan nog een extra element f_0 (alles uit C) is toegevoegd. Zij $d(>0)$ de g.o.g. van $\|f_0 - g\|$ als g de lineaire variëteit opgespannen door E_0 doorloopt. Zij A een lineaire functionaal met $Af_0 = 1$ en $Ag = 0$ ($g \in E_0$). De elementen van E kunnen geschreven worden in de vorm $f_0 - g$, waarin g een lineaire combinatie van elementen uit E_0 aanduidt. Volgens stelling 1.3.1.4 is

$$1 \leq M_A \cdot \|f_0 - g\|.$$

Hieruit, i.v.m. de definitie van d , volgt: $M_A \geq \frac{1}{d}$. We hebben nu de volgende

S t e l l i n g. Zij E_0 een deelverzameling van C en zij f een willekeurig element uit C . Het element f kan door lineaire combinaties uit E_0 benaderd worden tot op een afstand $d(>0)$ dan en alleen dan, indien voor elke l.f. A met $Af = 1$, en $Ag = 0$ (g uit E_0) voldaan is aan: $M_A \geq \frac{1}{d}$. Dit betekent dus: elk element uit C kan door lineaire combinaties uit E_0 willekeurig dicht benaderd worden dan en alleen dan, indien er géén enkele l.f. (buiten de nul operator) bestaat die de elementen van E_0 nul maakt (of: indien er géén enkele functie van begrensde variatie $\alpha(x)$ bestaat met $\int_a^b g(x) d\alpha(x) = 0$ (g uit E_0)) zonder dat dit ook het geval is met elk element van C .

Een tweede stelling betreft het m o m e n t e n p r o b l e e m stel $f_n(x)$ ($n=0,1,2,\dots$) zijn gegeven continue functies en μ_n ($n=0,1,2,\dots$) zijn gegeven getallen (m o m e n t e n); gevraagd wordt nu een functie $\alpha(x)$, v.b.v. in (a,b) , te vinden zó dat

$$\mu_n = \int_a^b f_n(x) d\alpha(x) \quad (n=0,1,\dots).$$

Het komt er dus op neer een begrensde l.f. A te vinden, die op de verzameling E van de functies $f_n(x)$ de waarden μ_n aanneemt. We hebben nu de volgende

S t e l l i n g. Het momentenprobleem heeft als oplossing een functie $\alpha(x)$ waarvan de totale variatie $\leq M$ is dan en alleen dan, als voor elke keuze van de constanten c_k voldaan is aan

$$\left| \sum_{k=0}^n c_k \mu_k \right| \leq M \cdot \left\| \sum_{k=0}^n c_k f_k(x) \right\|.$$

Aan de gestelde voorwaarde is in het reële geval voldaan als het probleem een "positief" karakter bezit, d.w.z. als geldt:

$$\sum c_k f_k(x) \geq 0 \Rightarrow \sum c_k \mu_k \geq 0, \text{ en één van de gegeven}$$

functies, $f_0(x)$, gelijk is aan 1.

Immers, is $h(x) = \sum c_k f_k(x)$, dan geldt:

$$\|h\| f_0(x) \pm h(x) \geq 0 \Rightarrow \|h\| \mu_0 \pm \sum c_k \mu_k \geq 0 \Rightarrow \left| \sum c_k \mu_k \right| \leq \mu_0 \|h\|.$$

Bovendien is in dit geval de functie $\alpha(x)$ niet-afnemend; dit volgt uit

$$\mu_0 = \int_a^b f_0(x) d\alpha(x) = \int_a^b d\alpha(x), \text{ en}$$

$$\text{tot.var. van } \alpha(x) \leq \mu_0.$$

V o o r b e e l d. Beschouw het probleem der t r i g o n o m e -
t r i s c h e m o m e n t e n: voor $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ is

$$\mu_n = \int_0^{2\pi} e^{inx} d\alpha(x).$$

Hieruit volgt: $\mu_n = \overline{\mu_{-n}}$, en ook volgen de reële momenten:

$$\int_0^{2\pi} \cos nx d\alpha(x) (n=0, 1, \dots), \int_0^{2\pi} \sin nx d\alpha(x) (n=1, 2, \dots).$$

Stel nu dat het probleem een niet-dalende $\alpha(x)$ tot oplossing bezit. Dan is, voor elk eindig aantal complexe getallen $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$, op grond van

$$\int_0^{2\pi} \sum_{m,n=-N}^N e^{i(n-m)x} \rho_n \bar{\rho}_m d\alpha(x) = \int_0^{2\pi} \left| \sum_{m=-N}^N e^{inx} \rho_n \right|^2 d\alpha(x) \geq 0,$$

voldaan aan

$$\sum_{m, n=-N}^N \mu_{n-m} p_n \bar{p}_m \geq 0.$$

Is omgekeerd aan deze laatste betrekking voldaan voor elk stel complexe getallen $p_1, p_2, \dots, p_N$, dan is ook voor elk trigonometrisch polynoom $t(x) \geq 0$, op grond van

$$t(x) = |q(x)|^2 = \left| \sum_j p_j e^{ijx} \right|^2 = \sum_{j,k} p_j \bar{p}_k e^{i(j-k)x},$$

voldaan aan

$$At = \sum_{j,k} p_j \bar{p}_k \mu_{j-k} \geq 0,$$

waaruit blijkt dat dit momentenprobleem "positief" is.

O p m e r k i n g 1. Bij dit laatste bewijs is gebruik gemaakt van een stelling van Fejér-Riesz, dat elk trigonometrisch polynoom $t(x) \geq 0$ voorgesteld kan worden als het vierkant van de modulus van een ander polynoom $q(x)$, waarvan de coëfficiënten niet noodzakelijk reëel zijn. Voor een strikt positief polynoom $t(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} > 0$ bewijst men deze hulpstelling als volgt. Allereerst is $c_k = \overline{c_{-k}}$ en $c_n \neq 0$. Dan is

$$\begin{aligned} P(z) &= c_{-n} + c_{-n+1}z + \dots + c_n z^{2n} \\ &= z^{2n} \overline{P(1/\bar{z})} \\ &= c \prod_k (z - \alpha_k)^{r_k} z^S \prod_j \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\beta_j} \right)^{s_j}, \end{aligned}$$

waarbij $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ de nulpunten van $P(z)$ binnen de eenheidscirkel zijn, $\beta_1, \beta_2, \dots$ die er buiten, alle met in de exponenten aangegeven multipliciteiten. $S = \sum s_j$. Verder kan de nummering zó zijn dat $\beta_k = 1/\bar{\alpha}_k$ en $r_k = s_k$, terwijl

$$S = \sum s_k = \sum r_k = 1/2 \sum (s_k + r_k) = n.$$

Derhalve is

$$\begin{aligned} t(x) &= e^{-inx} P(e^{ix}) = c \prod_k (e^{ix} - \alpha_k)^{r_k} \prod_k (e^{-ix} - \bar{\alpha}_k)^{s_k} \\ \text{en } q(x) &= \sqrt{c} \prod_k (e^{ix} - \alpha_k)^{r_k}, \end{aligned}$$

waarmee het bewijs is geleverd.

O p m e r k i n g 2. Is $t(x) > 0$, dan is dus $At \geq 0$. Is echter $t_0(x) \geq 0$, dan stelt men $t_0(x) + \varepsilon \equiv t(x) > 0$. Door limietovergang blijkt nu $At_0(x) \geq 0$.

1.3.1.6. Partieële integratie. Tweede middelwaardestelling. Uitgaande van de verdeling

$$\xi_{-1} = a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = b = \xi_{n+1}$$

heeft men de identiteit

$$\begin{aligned} \sum_0^n \alpha(\xi_i) \{f(x_{i+1}) - f(x_i)\} &= [\alpha(x)f(x)]_a^b = \\ &= - \sum_0^{n+1} f(x_i) \{ \alpha(\xi_i) - \alpha(\xi_{i-1}) \}, \end{aligned}$$

waaruit door limietovergang verkregen wordt:

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) + \int_a^b \alpha(x) df(x) = [f(x)\alpha(x)]_a^b,$$

aannemend, dat het bestaan van één der optredende integralen is gegeven.

Zij verder $\alpha(x)$ monotoon niet-dalend, en zij $f(x)$ Lebesgue-sommeerbaar. Stelt men

$$F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi,$$

dan is de waarde van de integraal $\int_a^b F(x) d\alpha(x)$ gelegen tussen twee extreme waarden van $F(x)$ vermēnigvuldigd met $\alpha(b) - \alpha(a)$. Dus $F(x)$ is gelijk aan

$$F(\xi) \{ \alpha(b) - \alpha(a) \} = \{ \alpha(b) - \alpha(a) \} \int_a^\xi f(x) dx$$

en daar

$$\int_a^b \alpha(x) dF(x) = \int_a^b \alpha(x) f(x) dx$$

heeft men

$$\int_a^b \alpha(x) f(x) dx = \alpha(a) \int_a^\xi f(x) dx + \alpha(b) \int_\xi^b f(x) dx,$$

d.i. de tweede middelwaardestelling.

1.3.1.7. Rijen van functionalen.

Zij $\{A_n\}$ een rij van l.f. (of: zij $\{\alpha_n(x)\}$ een rij van functies met begrensde variatie en $\alpha_n(a)=0$). Zij verder gegeven dat

$M_{A_n} \leq B$ ($n=1,2,\dots$) en dat voor een complete verzameling van functies binnen C geldt: $A_n f_k \rightarrow A f_k$. Elk element f van C kan willekeurig dicht benaderd worden door lineaire combinaties van f_k : bij elke $\varepsilon > 0$ bestaat er een $g = \sum_1^m c_k f_k$ zó dat $\|f - g\| < \varepsilon$. Verder is

$$A_n g = \sum_1^m c_k A_n f_k \rightarrow \sum_1^m c_k A f_k = A g \quad (n \rightarrow \infty).$$

Voor n groot genoeg is

$$|A g - A_n g| < \varepsilon.$$

Dus

$$|A f - A_n f| \leq |A(f - g)| + |A g - A_n g| + |A_n(g - f)| \leq M_A \varepsilon + \varepsilon + B \varepsilon.$$

Onder de gestelde voorwaarden geldt voor elke continue functie

$$A_n f \rightarrow A f.$$

Men kan als volgt een c o m p l e t e v e r z a m e - l i n g als bovenbedoeld definiëren. Een continue functie kan willekeurig dicht (op het interval (a,b)) benaderd worden door polygoon-functies en elke polygoonfunctie is een lineaire combinatie van de functies $f(x; \xi) = \xi - x$ voor $x \leq \xi$ en $=0$ voor $x > \xi$ en de functie 1. Eén der condities kan dus geschreven worden in de vorm:

$$\int_a^b d\alpha_n(x) = \int_a^b d\alpha(x) \text{ of } \alpha_n(b) \rightarrow \alpha(b), \text{ en}$$

$$\int_a^\xi (\xi - x) d\alpha_n(x) \rightarrow \int_a^\xi (\xi - x) d\alpha(x) \text{ of } \int_a^\xi \alpha_n(x) dx \rightarrow \int_a^\xi \alpha(x) dx.$$

Dus geldt de volgende

S t e l l i n g. Gegeven is dat A_n en A lineaire functionalen zijn met betrekking tot de continue functies in het interval $a \leq x \leq b$, en dat $\alpha_n(x)$ en $\alpha(x)$ met $\alpha_n(a)=0$ en $\alpha(x)=0$ de overeenkomstige genererende functies zijn. Nodig en voldoende daarvoor dat voor elke continue functie $f(x)$ de rij $A_n f \rightarrow A f$ is dat

$$(*) \quad \int_a^\xi \alpha_n(x) dx \rightarrow \int_a^\xi \alpha(x) dx \quad (a < \xi \leq b)$$

$$\begin{array}{l} \text{en} \\ \text{en} \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha_n(b) \rightarrow \alpha(b), \\ \sup M_{A_n} < \infty. \end{array}$$

Veronderstellen we nu dat $\alpha_n(x)$ ($n=1,2,\dots$) niet-dalende functies zijn, en zij ξ een continuïteitspunt van $\alpha(x)$. Dan is

$$\frac{1}{h} \int_{\xi-h}^{\xi} \alpha_n(x) dx \leq \alpha_n(\xi) \leq \frac{1}{k} \int_{\xi}^{\xi+k} \alpha_n(x) dx \quad (h, k > 0),$$

en als $n \rightarrow \infty$, hebben wij

$$\frac{1}{h} \int_{\xi-h}^{\xi} \alpha(x) dx \leq \liminf \alpha_n(\xi) \leq \limsup \alpha_n(\xi) \leq \frac{1}{k} \int_{\xi}^{\xi+k} \alpha(x) dx,$$

wegens (*). Daar ξ een continuïteitspunt is van $\alpha(x)$ volgt uit de laatste ongelijkheden:

$$\alpha_n(\xi) \rightarrow \alpha(\xi).$$

Stel nu, omgekeerd, dat in de voorafgaande stelling i.p.v. (*) gegeven is dat $\alpha_n(\xi) \rightarrow \alpha(\xi)$ in de continuïteitspunten van de functie $\alpha(x)$, terwijl nog bekend is dat de functies $\alpha_n(x)$ niet-dalend zijn. We kunnen (zelfs) de limietovergang $\alpha_n(x) \rightarrow \alpha(x)$ laten gelden in een overal dichte verzameling. Stel x en x' ($x < x'$) zijn twee punten van deze verzameling. Zij ξ met $x < \xi < x'$ een continuïteitspunt van $\alpha(x)$. Dan is

$$\alpha(x) = \lim \alpha_n(x) \leq \liminf \alpha_n(x) \leq \limsup \alpha_n(x) \leq \lim \alpha_n(x') = \alpha(x').$$

Door $x \uparrow \xi$ en $x' \downarrow \xi$ vindt men: $\alpha_n(\xi) \rightarrow \alpha(\xi)$.

1.3.2. Generalisaties van de integraal van Stieltjes.

1.3.2.1. Integraal van Stieltjes - Riemann en integraal van Stieltjes - Lebesgue.

In 1.3.1.1 hebben we de integraal van Stieltjes $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$ gedefinieerd voor functies $f(x)$, continu in $a \leq x \leq b$, en voor $\alpha(x)$ van begrensde variatie. De vraag rijst of men deze definitie kan uitbreiden tot andere dan continue functies $f(x)$. Het antwoord is dat discontinue functies kunnen worden toegelaten dan en alléén dan als de discontinuïteitpunten van $f(x)$ een verzameling met variatie 0 t.o.v. $\alpha(x)$ vormen, d.w.z. als men deze punten kan overdekken door een rij intervallen waarop de totale variaties van $\alpha(x)$ een som hebben die willekeurig klein is (denk aan het overeenkomstige resultaat in de theorie van de Riemann-integratie). Door speciale eisen op te leggen aan de x_k en de ξ_k kan men tot nog meer algemene integraaldefinities komen. Zie T.H. Hildebrandt, Definitions of the Stieltjes integrals of the Riemann type, Amer.Math.Monthly (1938), 265-278.

Een tweede methode om de integraal van Stieltjes in algemener zin te definiëren is de weg via de functionen Af (zie 1.3.1.2). We vervangen de integraal met $f \in C$ door de functionaal Af . Is f , algemener, de limiet van een monotone rij van continue functies, dan voeg men aan f de limiet van de functionen dezer functies toe. De waarde van $\alpha(x)$ in een discontinuïteitpunt van $\alpha(x)$ speelt geen rol! Zijn dus $\alpha(x)$ en $\beta(x)$ twee functies v.b.v., die een constante verschillen in de punten van een overal dichte verzameling, dan is $Af=Bf$, eerst voor de functies $\in C$, voorts voor de uitgebreide klasse der functies f .

De uitbreiding van de operator A heeft dus op een manier plaats die parallel is aan die gevolgd is in 1.3.1.2. De uitbreiding tot functies van de vorm $f-g$ (f en g limieten) kostte daar enige moeite (omdat de functionaal niet positief hoeft te zijn); hier kan men zich beperken tot positieve functionen door $\alpha(x)$ te schrijven als het verschil $\alpha_1(x) - \alpha_2(x)$ van twee monotone functies, waardoor $A=A_1-A_2$ met A_1 en A_2 positief.

Ook kan men nu de eis dat de limietfuncties begrensd zijn laten vallen. I.p.v. toenemende en uniform begrensde rijen f_n te gebruiken kan men eisen dat de rijen $\{f_n\}$ toenemend zijn en de rijen $A_1 f_n$ en $A_2 f_n$ begrensd zijn. Weliswaar moeten de verzamelingen der punten met $f_n = \infty$ of $f = \infty$ een variatie 0 hebben t.o.v. elk der functies $\alpha_1(x)$ en $\alpha_2(x)$ (zie voor de definitie van zo'n verzameling pag. FA 20 onderaan). Gewoonlijk liest men de splitsing van $\alpha(x)$ in de vorm $p(x)$ en $n(x)$ (positieve en negatieve variatie) en schrijft men $A = P - N$. De verzameling met variatie 0 t.o.v. $p(x)$ en $n(x)$ heeft deze eigenschap ook t.a.v. $\alpha(x)$ en eveneens t.a.v. de onbepaalde totale variatie $\tau(x)$ van $\alpha(x)$.

1.3.2.2. Herleiding van de integraal van Stieltjes - Lebesgue tot die van Lebesgue.

Bedoelde herleiding is van Lebesgue afkomstig. Zie zijn artikel: Sur l'intégrale de Stieltjes et sur les opérations linéaires, C.R.A.S. Paris, 150 (1910), 86-88.

Zij, allereerst, $f(x)$ continu, $\alpha(x)$ continu en strikt-monotoon toenemend. Dus bezit $\alpha(x)$ een inverse functie $x(\alpha)$. Een verdeling van het interval $[a, b]$ volgens $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ geeft een overeenkomstige verdeling $\alpha(a) = \alpha(x_0) < \alpha(x_1) < \dots < \alpha(x_n) = \alpha(b)$ op het interval $[\alpha(a), \alpha(b)]$. Stelt men $\beta_k = \alpha(\xi_k)$, dan is

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) [\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^n f(x(\beta_k)) [\alpha_k - \alpha_{k-1}],$$

en door limietovergang volgt:

$$(*) \quad \int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f(x(\alpha)) d\alpha.$$

Stel nu dat $\alpha(x)$ wel monotoon-toenemend (in de strikte zin) doch niet noodzakelijk continu is. De vraag is hoe de omkeersfunctie wordt gedefinieerd. Als $\alpha(x)$ in $x=c$ een sprong maakt, dan kan $\alpha(c)$ als veelwaardige functie worden beschouwd: $\alpha(c)$ neemt alle waarden tussen $\alpha(c-0)$ en $\alpha(c+0)$ aan. Door op het interval $\alpha(c-0) \leq \alpha \leq \alpha(c+0)$ nieuwe verdelingspunten in te lassen en benaderingssommen te vormen komt men tot dezelfde conclusie als in het eerste geval. Zie (*).

Het geval dat $\alpha(x)$ niet strikt-monotoon is (er zijn dus intervallen waarop $\alpha(x)$ constant is) laat zich op overeenkomstige manier behandelen. Weer geldt (*).

Zij nu $\alpha(x)$ van begrensde variatie. Dan kan men de gebruikelijke splitsing van $\alpha(x)$ in het verschil van twee monotone functies toepassen. I.p.v. $\alpha(x)$ kan men ook de totale variatie $\tau(x)$ van $\alpha(x)$ benutten. Zij $x(\tau)$ de omkeersfunctie van de monotone (!) functie $\tau(x)$. Beschouw de functie $\alpha(x(\tau))$ (teken een grafiek). Verbind de punten, behorend bij $\tau(x-0)$ en $\tau(x)$, door een recht lijnstuk evenals de punten, behorend bij $\tau(x)$ en $\tau(x+0)$ (aangenomen dat x een discontinuïteitspunt van $\alpha(x)$ is. De aldus geconstrueerde functie $\alpha(x(\tau))$ heeft fraaie eigenschappen: continu, van begrensde variatie, voldoen aan de voorwaarde van Lipschitz, de differentiequotiënten zijn absoluut genomen ≤ 1 , de functie is de integraal van z'n afgeleide

$$\varepsilon(\tau) = [\alpha(x(\tau))]',$$

welke b.o. bestaat; de onbepaalde totale variatie is gelijk aan τ ; de afgeleide van deze variatie is (op het teken na) gelijk aan die van de functie. We hebben dus (b.o.)

$$|\varepsilon(\tau)| = \tau' = 1.$$

Voor elk tweetal continuïteitspunten x_1 en x_2 van $\alpha(x)$ geldt dus:

$$\alpha(x_2) - \alpha(x_1) = \alpha(x(\tau_2)) - \alpha(x(\tau_1)) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \varepsilon(\tau) d\tau,$$

waar $\tau_1 = \tau(x_1)$ en $\tau_2 = \tau(x_2)$. De betrekking

$$(**) \quad \int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_{\tau(a)}^{\tau(b)} f(x(\tau)) \varepsilon(\tau) d\tau$$

is nu geldig voor $f(x) = \text{constant}$, vervolgens voor $f(x) = \text{een trapfunctie (met sprongpunten in continuïteitsgebieden van } \alpha(x))$, enz.

Nu is

$$(***) \quad \int_a^b f(x) d\tau(x) = \int_{\tau(a)}^{\tau(b)} f(x(\tau)) d\tau;$$

dit is immers in het begin van deze paragraaf bewezen ($\tau(x)$ is strikt-monotoon). Stelt men $p(x) = \frac{1}{2} [\tau(x) + \alpha(x)]$ en $n(x) = \frac{1}{2} [\tau(x) - \alpha(x)]$, dan is

$$\int_a^b f(x) dp(x) = \int_{\tau(a)}^{\tau(b)} f(x(\tau)) \frac{1+\xi(\tau)}{2} d\tau = \int_{e^+} f(x(\tau)) d\tau$$

(het eerste gelijktteken wegens (**), het tweede op grond van (** *); e^+ is de verzameling van $\xi(\tau) = 1$). Evenzo is

$$\int_a^b f(x) dn(x) = \int_{\tau(a)}^{\tau(b)} f(x(\tau)) \frac{1-\xi(\tau)}{2} d\tau = \int_{e^-} f(x(\tau)) d\tau,$$

(op e^- is $\xi(\tau) = -1$). Door limieten van monotone rijen te nemen blijkt dus dat de laatste formules geldig zijn voor functies $f(x)$, die sommeerbaar zijn t.o.v. $p(x)$ en $n(x)$, en dus ook sommeerbaar t.o.v. $\tau(x) = p(x) + n(x)$. Men ziet dus dat deze functies $f(x)$ de eigenschap hebben dat $f(x(\tau))$ sommeerbaar zijn op het interval $[\tau(a), \tau(b)]$. Voor deze functies geldt dus (**). Conclusie: $f(x)$ is sommeerbaar t.o.v. $\alpha(x)$, dan en alleen dan, als $f(x(\tau))$ sommeerbaar is (in gewone zin).

1.3.2.3. Enige integraal betrekkingen.

Opnieuw beschouwen we de integraal $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$. We veronderstellen dat $\beta(x)$ een monotoon-niet-dalende functie t.o. waarvan $\alpha(x)$ absoluut continu is; d.w.z. voor elk stelsel disjuncte intervallen (α_k, β_k) met de eigenschap dat $\sum \{\beta(b_k) - \alpha(a_k)\}$ voldoende klein is, is ook de som $\sum |\alpha(b_k) - \alpha(a_k)|$ willekeurig klein. In dit geval geldt de betrekking

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_{\beta(a)}^{\beta(b)} f\{x(\beta)\} [\alpha(x(\beta))]' d\beta.$$

Een speciaal geval is: is $\beta(x) = x$ en is $\alpha(x)$ in gewone zin absoluut continu (zie de definitie in 1.2.2.3), dan geldt

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x) \alpha'(x) dx.$$

Met behulp hiervan kunnen we de substitutieregel voor integralen van Lebesgue (zie 1.2.2.4) bewijzen.

Immers, zij $\alpha(x)$ absoluut continu en niet-dalend en zij $h(\alpha)$ een op het interval $\alpha(a) \leq \alpha \leq \alpha(b)$ gedefinieerde sommeerbare functie. Stel dan $f(x) = h(\alpha(x))$, waaruit volgt $f(x(\alpha)) = h(\alpha)$ (wegens de monotonie van $\alpha(x)$). Op grond van de aan het begin van 1.3.2.2 genoemde betrekking (*) vinden we dat

$$\begin{aligned} \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} h(\alpha) d\alpha &= \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f(x(\alpha)) d\alpha = \int_a^b f(x) d\alpha(x) = \\ &= \int_a^b f(x) \alpha'(x) dx = \int_a^b h(\alpha(x)) \alpha'(x) dx. \end{aligned}$$

We beschouwen nogmaals de aan het begin van deze paragraaf genoemde betrekking, en i.h.b. de functie $[\alpha(x(\beta))]'$. Deze afgeleide naar β bestaat b.o. Waar $x(\beta)$ constant is (corresponderend met een discontinuïteitpunt van $\alpha(x)$) definieert men $\alpha(x(\beta))$ als een geschikte lineaire functie. Op deze laatstbedoelde intervallen is $[\alpha(x(\beta))]'$ constant. Dus kan men deze afgeleide als een functie van $x(\beta)$ beschouwen, zeg $g(x(\beta))$. Op grond van deze overwegingen geldt nu

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) d\alpha(x) &= \int_{\beta(a)}^{\beta(b)} f\{x(\beta)\} [\alpha(x(\beta))] 'd\beta = \\
&= \int_{\beta(a)}^{\beta(b)} f\{x(\beta)\} g\{x(\beta)\} d\beta = (\text{volgens 1.3.2.2 (*))} \\
&\quad \int_a^b f(x)g(x) d\beta(x).
\end{aligned}$$

Neem voor $f(x)$ de karakteristieke functie van het interval (a, ξ) , dan volgt uit de laatstgenoemde betrekking

$$\alpha(\xi) = \int_a^{\xi} g(x) d\beta(x),$$

waarmee bewezen is: een functie $\alpha(x)$, die absoluut continu is t.o.v. een toenemende functie $\beta(x)$, is de onbepaalde integraal van een functie $g(x)$, die sommeerbaar is t.o.v. $\beta(x)$. Zoals in 1.2.2.3 laat zich ook hier aantonen, dat elke onbepaalde integraal van deze aard absoluut continu is t.o.v. $\beta(x)$.

Indien omgekeerd de betrekking $\alpha(\xi) = \int_a^{\xi} g(x) d\beta(x)$ gegeven is, waarbij $\beta(x)$ een functie v.b.v.^a is, dan kan men hieruit weer afleiden:

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x)g(x) d\beta(x),$$

en wel op dezelfde manier als die waarop de substitutieregels voor integralen van Lebesgue is afgeleid (zie 1.2.2.4). Daartoe denken we ons $\beta(x)$ gesplitst, op de bekende wijze, in $p(x)-n(x)$, en $g(x)$ in $g^+(x)-g^-(x)$. Zo beperken we ons in het verdere deel van het bewijs tot het geval van een toenemende $\beta(x)$ en een niet-negatieve $g(x)$. We passen dan de redenering van het bewijs van de substitutieregels in 1.2.2.4 toe: voor $f(x)$ eerst een constante, dan een trapfunctie, vervolgens een functie $\in C_1$ en ten slotte een functie $\in C_2$.

Tot slot leiden we een betrekking af waarin een samengestelde functie optreedt. Zij $g(x)$ sommeerbaar t.o.v. een toenemende functie $\beta(x)$, $a \leq x \leq b$. Zij $e_y(x)$ de karakteristieke functie van de verzameling der punten x met $g(x) \leq y$. Zij $f(y)$ sommeerbaar t.o.v. $\alpha(y)$ ($-\infty < y < \infty$). Dan is de functie

$$\alpha(y) = \int_a^b e_y(x) d\beta(x)$$

monotoon $\uparrow$. De b e w e r i n g is: $f(g(x))$ is sommeerbaar t.o.v. $\beta(x)$, terwijl

$$\int_a^b f(g(x)) d\beta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) d\alpha(y).$$

B e w i j s. Stel $f(y)$ is de karakteristieke functie van een interval $c < y \leq d$. Dan is (voor deze f)

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= e_d(x) - e_c(x) \text{ en} \\ \int_a^b f(g(x)) d\beta(x) &= \int_a^b e_d(x) d\beta(x) - \int_a^b e_c(x) d\beta(x) \\ &= \alpha(d) - \alpha(c) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) d\alpha(y). \end{aligned}$$

Daarna volgt men weer de meermalen toegepaste redenering langs trapfuncties, enz., tot men de functies $f(y)$ sommeerbaar t.o.v. $\alpha(y)$ heeft bereikt.

1.3.2.4. F u n c t i e s v a n t w e e (e n m e e r) v a r i a b e l e n .

De verkregen resultaten kunnen worden uitgebreid tot het geval van functies van twee variabelen. Beschouw de verzameling der functies continu (en gedefinieerd) in een begrensde en gesloten gebied E , gelegen in het eenheidsinterval $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Is A een lineaire functionaal opererend op de beschouwde functieverzameling (gekoppeld aan E), dan noemen we A' de l.f. opererend op de functies continu in het eenheidsinterval, en definiëren: $A'f = Af$ (t.o.v. E). Men kan ook hier aantonen dat er een functie $\alpha(x,y)$ bestaat, v.b.v., en zó dat

$$A'f = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) d\alpha(x,y).$$

De waarde van $\alpha(x,y)$ is gelijk aan de waarde van A' genomen op de karakteristieke functie van het interval $(0,0)$, $(0,y)$, $(x,0)$, (x,y) , dus gelijk aan de waarde van A genomen op de doorsnede van E met dit interval, waarbij onder A hier de uitbreiding van de oorspronkelijke l.f. (betrekking hebbend op continue functies) wordt verstaan. Deze uitbreiding kan men zich als volgt voltrokken denken: zij e een gesloten verzameling,

zij $d(x,y)$ de afstand van een punt (x,y) tot e , zij $f_n(x,y) = (1 - nd(x,y))^+$ het positieve deel van $1 - nd(x,y)$. Dan is $f_n(x,y)$ een continue functie ($n=1,2,\dots$) en geldt $f_n(x,y) \downarrow e(x,y)$, de karakteristieke functie van e . Men definieert nu $Ae = \lim_{n \rightarrow \infty} Af_n$ ($n \rightarrow \infty$).

De Stieltjes-integraal van $f(x,y)$ (continu) laat zich als volgt definieren. Stel A is een positieve l.f. Splits E in niet-overlappende gesloten deelverzamelingen $e_k(x,y)$ ($k=1,\dots,n$). Zijn m_k en M_k minimum en maximum van f in $e_k(x,y)$, dan beschouwe men de sommen $\sum_{k=1}^n m_k Ae_k(x,y)$ en $\sum_{k=1}^n M_k Ae_k(x,y)$. Als $n \rightarrow \infty$ convergeren deze sommen naar $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) d\alpha(x,y)$.